УДК 517.946

С.Г. Блажевський

МОДЕЛЮВАННЯ ДИФУЗІЙНИХ ПРОЦЕСІВ В НЕОДНОРІДНИХ СЕРЕДОВИЩАХ З М'ЯКИМИ МЕЖАМИ МЕТОДОМ ГІБРИДНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ЕЙЛЕРА-ЕЙЛЕРА-ФУР'Є

Постановка проблеми та аналіз публікацій по темі дослідження. Процеси дифузії, які постійно відбуваються в навколишньому середовищі, привертали до себе увагу протягом усієї історії розвитку суспільства. Але серйозні дослідження почалися з найпростішої моделі дифузійного процесу – диференціального рівняння дифузії (теплопровідності) параболічного типу [1]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial u^2}{\partial r^2} = f(t,r)$$

з відповідними початковими та крайовими умовами. Потреби практики призводили до різного узагальнення даного рівняння. Слід відмітити появу в другій половині XX-го століття «Узагальненої термомеханіки», породженої гіперболічним рівняння теплопровідності [2]. Розроблялися різні аналітичні, числові та аналітично-числові методи знаходження розв'язку.

Особливу увагу заслуговує розроблений в другій половині XX-го століття метод кусково-сталих фізико-технічних характеристик для вивчення технічного стану композитних матеріалів. Це привело навіть у випадку жорсткості межі області до диференціального рівняння з сингулярними коефіцієнтами типу дельта-функцій та її похідних [3]. Інтегральне зображення точного аналітичного розв'язку задачі в цьому випадку одержати неможливо. Цих труднощів можна уникнути, якщо здійснити моделювання дифузійного процесу методом гібридних диференціальних операторів. При цьому межа середовища може бути м'яка по відношенню до відбиття хвиль.

Мета статті. Дана робота присвячена моделюванню нестаціонарних дифузійних процесів методом гібридного диференціального оператора Ейлера-Ейлера-Фурье на трискладовому сегменті в припущенні, що межа середовища м'яка по відношенню до відбиття хвиль.

Основна частина. Побудуємо обмежений в області $D_2 = \{(t, r)\colon t \in (0, \infty), r \in I_2 = (R_0, R_1) \bigcup (R_1, R_2) \bigcup (R_2, R_3);\ R_0 \geq 0,\ R_3 < \infty\}$ розв'язок сепаратної системи диференціальних рівнянь дифузії параболічного типу

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u_1}{\partial t} + \gamma_1^2 u_1(t,r) - a_1^2 B_{\alpha_1}^*[u_1(t,r)] = f_1(t, r),\ r \in (R_0, R_1),\\
&\frac{\partial u_2}{\partial t} + \gamma_2^2 u_2(t,r) - a_2^2 B_{\alpha_2}^*[u_2(t,r)] = f_2(t, r),\ r \in (R_1, R_2),\\
&\frac{\partial u_3}{\partial t} + \gamma_3^2 u_3(t,r) - a_3^2 \frac{\partial^2 u_3(t,r)}{\partial r^2} = f_3(t, r),\ r \in (R_2, R_3)
\end{aligned} \tag{1}$$

за початковими умовами

$$u_j(t, r)|_{t=0} = g_j(r),\ r \in (R_{j-1}, R_j),\ j = 1, 2, 3, \tag{2}$$

крайовими умовами

$$B_{11}^0[u_1(t,r)]|_{r=R_0} = \omega_0(t),\ B_{22}^3[u_3(t,r)]|_{r=R_3} = \omega_3(t) \tag{3}$$

та умовами спряження

$$\left(B_{j1}^k[u_k(t,r)] - B_{j2}^k[u_{k+1}(t,r)]\right)|_{r=R_k} = \omega_{jk}(t),\ j, k = 1, 2. \tag{4}$$

У рівностях (1) – (4) беруть участь диференціальні оператори Фур'є $\frac{\partial^2}{\partial r^2}$, Ейлера $B_\alpha^* = r^2 \frac{d^2}{dr^2} + \frac{(2\alpha+1)rd}{dr} + \alpha^2$ та диференціальні оператори

$$B_{jm}^k = \left(\alpha_{jm}^k + \delta_{jm}^k \frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial r} + \beta_{jm}^k + \gamma_{jm}^k \frac{\partial}{\partial t},\ j = 1, 2;\ m = 1, 2;\ k = 0, 1, 2, 3. \tag{5}$$

Припускаємо, що виконані умови на коефіцієнти: $a_j > 0$; $2\alpha + 1 > 0$; $\alpha_{11}^0 \le 0$, $\beta_{11}^0 \ge 0$, $|\alpha_{11}^0| + |\beta_{11}^0| \ne 0$, $\alpha_{jm}^k \ge 0$, $\beta_{jm}^k \ge 0$, $\delta_{jm}^k \ge 0$, $\gamma_{jm}^k \ge 0$, $j, m, k = 1, 2$; $c_{11,j}\, c_{21,k} > 0$, $c_{j1,k} = \alpha_{2j}^k\beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k\beta_{2j}^k$, $c_{j2,k} = \delta_{2j}^k\gamma_{1j}^k - \delta_{1j}^k\gamma_{2j}^k = 0$, $\delta_{2j}^k\beta_{1j}^k - \delta_{1j}^k\beta_{2j}^k = \alpha_{1j}^k\gamma_{2j}^k - \alpha_{2j}^k\gamma_{1j}^k$.

Нехай шукані функції є оригіналами за Лапласом стосовно змінної t. У зображенні за Лапласом отримуємо крайову задачу: побудувати обмежений на множині I_2 розв'язок сепаратної системи диференціальних рівнянь Ейлера та Фур'є для модифікованих функцій

$$\begin{gathered}\left(B_{\alpha_1}^* - q_1^2\right)u_1^*(p,r) = -F_1^*(p,r),\; r \in (R_0, R_1),\\ \left(B_{\alpha_2}^* - q_2^2\right)u_2^*(p,r) = -F_2^*(p,r),\; r \in (R_1, R_2),\\ \left(\frac{d^2}{dr^2} - q_3^2\right)u_3^*(p,r) = -F_3^*(p,r),\; r \in (R_2, R_3)\end{gathered} \tag{6}$$

за крайовими умовами

$$\left.\left(\overline{\alpha}_{11}^0\frac{d}{dr} + \overline{\beta}_{11}^0\right)u_1^*(p,r)\right|_{r=R_0} = \omega_{01}^*(p),\; \left.\left(\overline{\alpha}_{22}^3\frac{d}{dr} + \overline{\beta}_{22}^3\right)u_3^*(p,r)\right|_{r=R_3} = \omega_{31}^*(p) \tag{7}$$

та умовами спряження

$$\left.\left[\left(\overline{\alpha}_{j1}^k\frac{d}{dr} + \overline{\beta}_{j1}^k\right)u_k^*(p,r) - \left(\overline{\alpha}_{j2}^k\frac{d}{dr} + \overline{\beta}_{j2}^k\right)u_{k+1}^*(p,r)\right]\right|_{r=R_k} = \omega_{jk}^*(p),\; j, k = 1, 2. \tag{8}$$

У рівностях (6) – (8) беруть участь функції:

$q_j^2 = a_j^{-2}(p + \gamma_j^2)$, $F_j^*(p,r) = a_j^{-2}(f_j^*(p,r) + g_j(r))$, $j = 1, 2, 3$; $\overline{\alpha}_{jm}^k = \alpha_{jm}^k + \delta_{jm}^k p$,

$\overline{\beta}_{jk}^m = \beta_{jk}^m + \gamma_{jk}^m p$, $u^*(p) = \int\limits_0^\infty u(t,r)e^{-pt}dt$, $\omega_{01}^*(p) = \omega_0^*(p) + \delta_{11}^0 g_1'(R_0) + \gamma_{11}^0 g_1(R_0)$,

$\omega_{31}^*(p) = \omega_3^*(p) + \delta_{22}^3 g_3'(R_3) + \gamma_{22}^3 g_3(R_3)$, $\omega_{jk,1}^*(p) = \omega_{jk}^*(p) + \psi_{jk}$; $\psi_{11}^0 \equiv \delta_{11}^0 g_1'(R_0) + \gamma_{11}^0 g_1(R_0)$,

$\psi_{22}^3 = \delta_{22}^3 g_3'(R_3) + \gamma_{22}^3 g_3(R_3)$, $\psi_{jk} = \delta_{j1}^k g_k'(R_k) + \gamma_{j1}^k g_k(R_k) - [\delta_{j2}^k g_{k+1}'(R_k) + \gamma_{j2}^k g_{k+1}(R_k)]$,

$j, k = 1, 2$; $\omega_0^*(p) = \int\limits_0^\infty \omega_0(t)e^{-pt}dt$, $\omega_3^*(p) = \int\limits_0^\infty \omega_3(t)e^{-pt}dt$, $\omega_{jk}^*(p) = \int\limits_0^\infty \omega_{jk}(t)e^{-pt}dt$,

$\mathrm{Re}\,q_j = a_j^{-1}\mathrm{Re}[(p + \gamma_j^2)^{1/2}]$, $p = \sigma + is$, $i^2 = -1$.

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Фур'є $(d^2/dr^2 - q^2)v = 0$ складають функції ch qr та sh qr; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Ейлера $(B_{\alpha_1}^* - q_1^2)v = 0$ та $(B_{\alpha_2}^* - q_2^2)v = 0$ складають функції $v_1 = r^{-\alpha_1 - q_1}$, $v_2 = r^{-\alpha_1 + q_1}$, $v_3 = r^{-\alpha_2 - q_2}$, $v_4 = r^{-\alpha_2 + q_2}$.

Наявність фундаментальної системи розв'язків дозволяє побудувати розв'язок крайової задачі (6) – (8) методом функцій Коші:

$$\begin{gathered}u_1^* = A_1 r^{-\alpha_1 - q_1} + B_1 r^{-\alpha_1 + q_1} + \int\limits_{R_0}^{R_1} E_1^*(p,r,\rho)F_1^*(p,\rho)\rho^{2\alpha_1 - 1}d\rho,\\ u_2^* = A_2 r^{-\alpha_2 - q_2} + B_2 r^{-\alpha_2 + q_2} + \int\limits_{R_1}^{R_2} E_2^*(p,r,\rho)F_2^*(p,\rho)\rho^{2\alpha_2 - 1}d\rho,\\ u_3^* = A_3\mathrm{ch}q_3 r + B_3\mathrm{sh}q_3 r + \int\limits_{R_2}^{R_3} E_3^*(p,r,\rho)F_3^*(p,\rho)d\rho.\end{gathered} \tag{9}$$

У рівностях (9) беруть участь функції Коші $E_j^*(p,r,\rho)$ [4, 6]:

$$E_1^*(p,r,\rho) = -\frac{1}{2q_1\Delta_{\alpha_1;11}}\begin{cases}\Psi^{0*}_{\alpha_1;11}(q_1,r)\Psi^{1*}_{\alpha_1;11}(q_1,\rho), & R_0<r<\rho<R_1,\\ \Psi^{0*}_{\alpha_1;11}(q_1,\rho)\Psi^{1*}_{\alpha_1;11}(q_1,r), & R_0<\rho<r<R_1,\end{cases} \tag{10}$$

$$E_2^*(p,r,\rho) = -\frac{1}{2q_2\Delta_{\alpha_2;11}}\begin{cases}\Psi^{1*}_{\alpha_2,12}(q_2,r)\Psi^{2*}_{\alpha_2}(q_2,\rho), & R_1<r<\rho<R_2,\\ \Psi^{1*}_{\alpha_2,12}(q_2,\rho)\Psi^{2*}_{\alpha_2}(q_2,r), & R_1<\rho<r<R_2,\end{cases} \tag{11}$$

$$E_3^*(p,r,\rho) = \frac{1}{q_3\Delta_{12}}\begin{cases}\Phi^2_{12}(q_3R_2,q_3r)\Phi^3_{22}(q_3R_3,q_3\rho), & R_2<r<\rho<R_3,\\ \Phi^2_{12}(q_3R_2,q_3\rho)\Phi^3_{22}(q_3R_3,q_3r), & R_2<\rho<r<R_3.\end{cases} \tag{12}$$

У рівностях (10) – (12) прийняті позначення:

$$Z^{m1}_{\alpha_n;jk}(q_n,R_m) = [(\bar\beta^m_{jk}-\alpha R_m^{-1}\bar\alpha^m_{jk}) - \bar\alpha^m_{jk}R_m^{-1}q_n]R_m^{-\alpha_n-q_n},$$

$$Z^{m2}_{\alpha_1;jk}(q_1,R_m) = [(\bar\beta^m_{jk}-\alpha R_m^{-1}\bar\alpha^m_{jk}) + \bar\alpha^m_{jk}R_m^{-1}q_n]R_m^{-\alpha_n+q_n},$$

$$\Psi^{m*}_{\alpha_n;j2}(q_n,r) = Z^{m2}_{\alpha_n;j2}(q_n,R_m)r^{-\alpha_n-q_n} - Z^{m1}_{\alpha_n;j2}(q_n,R_m)r^{-\alpha_n+q_n},\ n,m=1,2,$$

$$\Delta_{\alpha_n;j2}(q_n,R_{n-1},R_n) = Z^{n-1,1}_{\alpha_n;j2}(q_n,R_{n-1})Z^{n-1,1}_{\alpha_n;11}(q_n,R_n) - Z^{n-1,2}_{\alpha_n;j2}(q_n,R_{n-1})Z^{n-1,2}_{\alpha_n;11}(q_n,R_n),\ j=1,2,$$

$$V^{m1}_{jk}(q_s,R_m) = \overline{\alpha}^m_{jk}q_s\,\mathrm{sh}q_sR_m + \overline{\beta}^m_{jk}\mathrm{ch}q_sR_m,\ V^{m2}_{jk}(q_s,R_m) = \overline{\alpha}^m_{jk}q_s\,\mathrm{ch}q_sR_m + \overline{\beta}^m_{jk}\mathrm{sh}q_sR_m;$$

$$\Phi^m_{jk}(q_sR_m,q_sr) = V^{m2}_{jk}(q_s,R_m)\mathrm{ch}q_sr - V^{m1}_{jk}(q_s,R_m)\mathrm{sh}q_sr,$$

$$\Delta_{j1}(q_3R_2,q_3R_3) = V^{21}_{12}(q_3,R_2)V^{32}_{j1}(q_3,R_3) - V^{22}_{22}(q_3,R_2)V^{31}_{j1}(q_3,R_3).$$

Крайові умови (7) та умови спряження (8) для визначення величин A_j, B_j $(j=\overline{1,3})$ дають неоднорідну алгебраїчну систему:

$$Z^{01}_{11}(q_1R_0)A_1 - Z^{02}_{11}(q_1R_0)B_1 = \omega^*_{01}(p),$$

$$Z^{11}_{\alpha_1;j1}(q_1,R_1)A_1 + Z^{12}_{\alpha_1;j1}(q_1,R_1)B_1 - Z^{11}_{\alpha_2,j2}(q_2,R_1)A_2 - Z^{12}_{\alpha_2,j2}(q_2,R_1)B_2 = \omega^*_{j1,1} + \delta_{j2}G^*_{12},$$

$$Z^{21}_{\alpha_1;j1}(q_2,R_2)A_2 + Z^{22}_{\alpha_1;j1}(q_2,R_2)B_2 - V^{21}_{j2}(q_3,R_2)A_3 - V^{22}_{j2}(q_3,R_2)B_3 = \omega^*_{j2,1} + \delta_{j2}G^*_{23},\ j=1,2,$$

$$V^{31}_{22}(q_3,R_3)A_3 + V^{32}_{22}(q_3,R_3)B_3 = \omega^*_{31}(p). \tag{13}$$

У системі (13) беруть участь функції:

$$G^*_{12} = -\frac{c^*_{11}}{R_1^{2\alpha_1+1}}\int_{R_0}^{R_1}\frac{\Psi^{0*}_{\alpha_1;11}(q_1,\rho)}{\Delta_{\alpha_1;11}(q_1,R_0,R_1)}F_1^*(p,\rho)\rho^{2\alpha_1-1}d\rho + \frac{c^*_{21}}{R_2^{2\alpha_2+1}}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\Psi^{2*}_{\alpha_2;11}(q_2,\rho)}{\Delta_{\alpha_2;11}(q_2,R_1,R_2)}F_2^*(p,\rho)\times$$
$$\times\rho^{2\alpha_2-1}d\rho,$$

$$G^*_{23} = -\frac{c^*_{12}}{R_2^{2\alpha_2+1}}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\Psi^{2*}_{\alpha_2;12}(q_2,\rho)}{\Delta_{\alpha_2;11}(q_2,R_1,R_2)}F_2^*(p,\rho)\rho^{2\alpha_2-1}d\rho + c^*_{22}\int_{R_2}^{R_3}\frac{\Phi^3_{22}(q_3R_2,q_3\rho)}{\Delta_{12}(q_3R_2,q_3R_3)}F_3^*(p,\rho)d\rho$$

та символ Кронекера $\delta_{j2}(\delta_{12}=0,\delta_{22}=1)$.

Припустимо, що виконана умова однозначної розв'язності крайової задачі (6) – (8): для $p=\sigma+is$ із $\mathrm{Re}p=\sigma>\sigma_0$, де σ_0 – абсциса збіжності інтеграла Лапласа, та $\mathrm{Im}p=s\in(-\infty,+\infty)$ визначник алгебраїчної системи (13)

$$\Delta_\alpha(p) \equiv \Delta_{22}(q_3R_2,q_3R_3)A_{\alpha;1}(p) - \Delta_{12}(q_3R_2,q_3R_3)A_{\alpha;2}(p) =$$
$$= \Delta_{\alpha_1;11}(q_1,R_0,R_1)B_{\alpha_2;2}(p) - \Delta_{\alpha_1;21}(q_1,R_0,R_1)B_{\alpha_2;1}(p) \neq 0,\ (\alpha)=(\alpha_1,\alpha_2). \tag{14}$$

Якщо визначити головні розв’язки крайової задачі (6) – (8):

1) породжені крайовою умовою в точці $r=R_0$ функції Гріна

$$W^*_{\alpha;11}(p,r) = \frac{1}{\Delta_\alpha}[B_{\alpha_2;2}(p)\Psi^{1*}_{\alpha_1;11}(q_1,r) - B_{\alpha_2;1}(p)\Psi^{1*}_{\alpha_1;21}(q_1,r)],$$

$$W^*_{\alpha;12}(p,r) = -\frac{2q_1c^*_{11}}{R_1^{2\alpha_1+1}}\frac{1}{\Delta_\alpha}Q_{\alpha_2;2}(p,r),\; W^*_{\alpha;13}(p,r) = \frac{2q_1c^*_{11}}{R_1^{2\alpha_1+1}}\frac{2q_2c^*_{11}}{R_2^{2\alpha_2+1}}\Phi^3_{22}(q_3R_3,q_3r);$$

2) породжені крайовою умовою в точці $r = R_3$ функції Гріна:

$$W^*_{\alpha;31}(p,r) = -\frac{2q_2c^*_{21}}{R_1^{2\alpha_2+1}}\frac{q_3c^*_{22}}{\Delta_\alpha}\Psi^{0*}_{\alpha_2;11}(q_1,r), \qquad W^*_{\alpha;32}(p,r) = \frac{q_3c^*_{22}}{\Delta_\alpha}Q_{\alpha_1;1}(p,r),$$

$$W^*_{\alpha;33}(p,r) = \frac{1}{\Delta_\alpha}[A_{\alpha;2}(p)\Phi^2_{12}(q_3R_2,q_3r) - A_{\alpha;1}(p)\Phi^2_{22}(q_3R_2,q_3r)];$$

3) породжені неоднорідністю умов спряження функції Гріна

$$R^{1*}_{\alpha;11}(p,r) = -\frac{B_{\alpha_1;2}(p)}{\Delta_\alpha(p)}\Psi^{0*}_{\alpha_1;11}(q_1,r),\; R^{1*}_{\alpha;21}(p,r) = \frac{B_{\alpha_1;1}(p)}{\Delta_\alpha(p)}\Psi^{0*}_{\alpha_1;11}(q_1,r),$$

$$R^{1*}_{\alpha;12}(p,r) = \frac{2q_2c^*_{21}}{R_1^{2\alpha_2+1}}\Delta_{22}(q_3R_2,q_3R_3)\Psi^{0*}_{\alpha_1;11}(q_1,r)R^{1*}_{\alpha;22}(p,r) = -\frac{2q_2c^*_{21}}{R_1^{2\alpha_2+1}}\frac{1}{\Delta_\alpha(p)}\times$$

$$\times\Delta_{12}(q_3R_2,q_3R_3)\Psi^{0*}_{\alpha_1;11}(q_2,r),\, R^{2*}_{\alpha;11}(p,r) = \frac{\Delta_{\alpha_1;21}(q_3,R_0,R_1)}{\Delta_\alpha(p)}Q_{\alpha_2;2}(p,r), \tag{15}$$

$$R^{2*}_{\alpha;21}(p,r) = -\frac{\Delta_{\alpha_1;11}(q_1,R_0,R_1)}{\Delta_\alpha(p)}Q_{\alpha_2;2}(p,r),\, R^{2*}_{\alpha;12}(p,r) = -\frac{\Delta_{22}}{\Delta_\alpha(p)}Q_{\alpha;1}(p,r),$$

$$R^{2*}_{\alpha;22}(p,r) = \frac{\Delta_{12}}{\Delta_\alpha(p)}Q_{\alpha;1}(p,r),\, R^{3*}_{\alpha;11}(p,r) = \frac{2q_2c^*_{11}}{R_2^{2\alpha_2+1}}\frac{1}{\Delta_\alpha(p)}\Delta\alpha_{1;11}(q_1,R_0,R_1)\times$$

$$\times\Phi^{3*}_{22}(q_3R_3,q_3r), R^{3*}_{\alpha;21}(p,r) = -\frac{2q_2c^*_{12}}{R_2^{2\alpha_2+1}}\frac{1}{\Delta_\alpha(p)}\Delta\alpha_{1;11}(q_1,R_0,R_1)\Phi^{3*}_{22}(q_3R_3,q_3r),$$

$$R^{3*}_{\alpha;12}(p,r) = \frac{A_{\alpha;2}}{\Delta_\alpha(p)}\Phi^{3*}_{22}(q_3R_3,q_3r),\; R^{3*}_{\alpha;22}(p,r) = \frac{A_{\alpha;2}}{\Delta_\alpha(p)}\Phi^{3*}_{22}(q_3R_3,q_3r);$$

4) породжені неоднорідністю системи (6) функції впливу

$$H^*_{\alpha;11}(p,r,\rho) = -\frac{1}{2q_1}\begin{cases}\Psi^{0*}_{\alpha_1;11}(q_1,r)W^*_{\alpha;11}(p,\rho), & R_0 < r < \rho < R_1,\\ \Psi^{0*}_{\alpha_1;11}(q_1,\rho)W^*_{\alpha;11}(p,r), & R_0 < \rho < r < R_1,\end{cases}$$

$$H^*_{\alpha;12}(p,r,\rho) = \frac{c^*_{21}}{\Delta_\alpha(p)}\Psi^{0*}_{\alpha_1;11}(q_1,r)Q_{\alpha_2;2}(p,\rho), H^*_{\alpha;13}(p,r,\rho) = \frac{q_2c^*_{21}c^*_{22}}{R_1^{2\alpha_2+1}}\frac{1}{\Delta_\alpha}\times$$

$$\times\Psi^{0*}_{\alpha_2;11}(q_1,r)\Phi^{3*}_{22}(q_3R_3,q_3\rho), H^*_{\alpha;21}(p,r,\rho) = \frac{c^*_{121}}{R_2^{2\alpha_2+1}}\frac{1}{\Delta_\alpha(p)}\Psi^{0*}_{\alpha_1;11}(q_1,\rho)Q_{\alpha_2;2}(p,r),$$

$$H^*_{\alpha;22}(p,r,\rho) = \frac{1}{\Delta_\alpha(p)}\begin{cases}Q_{\alpha_2;1}(p,r)Q_{\alpha_2;2}(p,\rho), & R_1 < r < \rho < R_2,\\ Q_{\alpha_2;1}(p,\rho)Q_{\alpha_2;2}(p,r), & R_1 < \rho < r < R_2,\end{cases}$$

$$H^*_{\alpha;23}(p,r,\rho) = -\frac{c^*_{22}}{\Delta_\alpha(p)}Q_{\alpha_2;1}(p,r)\Phi^{3*}_{22}(q_3R_3,q_3\rho), \tag{16}$$

$$H^*_{\alpha;31}(p,r,\rho) = -\frac{c^*_{11}}{R_1^{2\alpha_2+1}}\frac{2q_2c^*_{12}}{R_2^{2\alpha_2+1}}\frac{1}{\Delta_\alpha}\Psi^{0*}_{\alpha_2;11}(q_1,\rho)\Phi^{3*}_{22}(q_3R_3,q_3r),$$

$$H^*_{\alpha;32}(p,r,\rho) = \frac{c^*_{12}}{R_2^{2\alpha_2+1}}\frac{1}{\Delta_\alpha(p)}Q_{\alpha;1}(p,\rho)\Phi^{3*}_{22}(q_3R_3,q_3r),$$

$$H^*_{\alpha;33}(p,r,\rho) = \frac{1}{q_3}\begin{cases}W^*_{\alpha;33}(p,r)\Phi^{3*}_{22}(q_3R_2,q_3\rho), & R_2 < r < \rho < R_3,\\ W^*_{\alpha;33}(p,\rho)\Phi^{3*}_{22}(q_3R_2,q_3r), & R_{02} < \rho < r < R_3.\end{cases}$$

У результаті однозначної розв'язності алгебраїчної системи (13) й підстановки одержаних значень A_j та B_j (j = 1, 2, 3) у формули (9) та низки елементарних перетворень одержимо єдиний розв’язок крайової задачі (6) – (8):

$$u_j^*(p,r) = W_{\alpha;1j}^*(p,r)\overline{\omega}_0^*(p) + \sum_{m,k=1}^{2} R_{\alpha;mk}^{j*}\overline{\omega}_{mk}^*(p) + W_{\alpha;3j}^*(p,r)\overline{\omega}_3^*(p) +$$

$$+\int_{R_0}^{R_1} H_{\alpha j1}^*(p,r,\rho)F_1^*(p,\rho)\rho^{2\alpha_1-1}d\rho + \int_{R_1}^{R_2} H_{\alpha;j2}^*(p,r,\rho)F_2^*(p,\rho)\rho^{2\alpha_2-1}d\rho + \tag{17}$$

$$+\int_{R_2}^{R_3} H_{\alpha;j3}^*(p,r,\rho)F_3^*(p,\rho)d\rho\,,\ j = 1, 2, 3.$$

Повертаючись у формулах (17) до оригіналу, одержуємо єдиний розв'язок задачі дифузії (6) – (8):

$$u_j(t,r) = \int_0^t W_{(\alpha);1j}(t-\tau,r)\omega_0(\tau)d\tau + [\delta_{11}^0 g_1'(R_0) + \gamma_{11}^0 g_1(R_0)]W_{(\alpha);1j}(t,r) +$$

$$+\sum_{m,k=1}^{2}\left[\int_0^t R_{(\alpha);mk}^j(t-\tau,r)\omega_{mk}(\tau)d\tau + R_{(\alpha);mk}^j(t,r)\psi_{mk}\right] +$$

$$+\int_0^t W_{(\alpha);3j}(t-\tau,r)\omega_3(\tau)d\tau + W_{(\alpha);3j}(t,r)[\delta_{22}^3 g_3'(R_3) + \gamma_{22}^3 g_3(R_3)] +$$

$$+\int_0^t\int_{R_0}^{R_1} H_{(\alpha);j1}(t-\tau,r,\rho)[f_1(\tau,\rho) + \delta_+(\tau)g_1(\rho)]a_1^{-2}\rho^{2\alpha_1-1}d\rho +$$

$$+\int_0^t\int_{R_1}^{R_2} H_{(\alpha);j2}(t-\tau,r,\rho)[f_2(\tau,\rho) + \delta_+(\tau)g_2(\rho)]a_2^{-2}\rho^{2\alpha_2-1}d\rho +$$

$$+\int_0^t\int_{R_2}^{R_3} H_{(\alpha);j3}(t-\tau,r,\rho)[f_3(\tau,\rho) + \delta_+(\tau)g_3(\rho)]a_3^{-2}d\rho\,,\ j = 1, 2, 3.$$

Тут $\delta_+(\tau)$ – дельта-функція, зосереджена в точці $\tau = 0$.

Висновок. Вектор-функція $u(t, r) = \{u_1(t, r);\ u_2(t, r);\ u_3(t, r)\}$ визначає інтегральне зображення єдиного аналітичного точного розв’язку задачі моделювання дифузійних процесів в неоднорідному середовищі з м’якими межами методом ГДО на сегменті полярної осі.

ЛІТЕРАТУРА

1. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1972. – 735 с.
2. Подстригач Я.С. Обобщенная термомеханика / Я.С. Подстригач, Ю.М. Коляно. – К.: Наук. думка, 1976. – 310 с.
3. Коляно Ю.М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела / Ю.М. Коляно. – К.: Наук. думка, 1992. – 280 с.
4. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений / В.В. Степанов. – М.: Физматгиз, 1959. – 468 с.
5. Лаврентьев М.А. Методы теории функций комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. – М.: Наука, 1987. – 688 с.
6. Курош А.Г. Курс высшей алгебры / А.Г. Курош. – М.: Наука, 1971. – 432 с.
7. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс / Г.Е. Шилов. – М.: Наука, 1965. – 328 с.

БЛАЖЕВСЬКИЙ Степан Георгійович – к.ф.-м.н., доцент кафедри диференціальних рівнянь Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича.

Наукові інтереси:

– математична фізика, математичне моделювання.

Если при постановке задачи основным является наличие внутренней связи в объекте, вызывающей изменение информации при изменении состояния объекта, то гипотеза (2) меняется на уравнение органического роста, и мы получаем меру Хартли

$$\frac{dP}{dI} = -\beta P, \Leftrightarrow I = -\frac{1}{\beta}\ln P \quad .$$

Однако при использовании меры Хартли наиболее информативным оказывается маловероятное событие, что в рассматриваемом случае равносильно наибольшему доверию к явно ложной информации.

Выводы:

1. В задачах сбора информации от множества несвязанных, малоинформированных источников нормой информации является доверительный интервал,соответствующий вероятности события.
2. Метрика определяется как доверительный интервал, соответствующий условной вероятности события по отношению к гипотезе.
3. Оценка источника сообщений производится с использованием энтропийной оценки, в смысле математического ожидания нормы и метрики.
4. Гипотеза о первичности информации позволяет адекватно задаче определять норму и метрику информационного пространства.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Коротаев С.М. Энтропия и информация – универсальные естественнонаучные понятия Росийский гуманитарный научный фонд http://www.chronos.msu.ru/RREPORTS/korotaev_entropia
2. Могилев А.В. Технологии поиска и хранения информации / А.В. Могилев, Л.В. ЛистроваТехнологии автоматизации управления БХВ-Петербург, 2012. -320 с.
3. Лекции по теории информации МГУ / доступ mindspring.narod.ru/math/it/
4. Хартли Р. Передача информации // Р. Хартли. Теория информации и её приложения. М.: Физматгиз. 1959. – С. 5-35.
5. Бражник Д.О. Розпізнавання методом компенсації інформаційних потоків / Д.О. Бражник, Т.І. Тернова, Л.О. Фаніна //Матеріали восьмої всеукраїнської міжнародної конференції з оброблення сигналів і зображень та розпізнавання образів. 28-31 серпня 2006р., м. Київ, Україна: Київ, 2006. – С.43.
6. Боровиков А.А. Теориявероятностей: Учеб.пособие для вузов.-2-е узд., перераб. и доп. – М.: Наука. Гл. Ред.. физ.-мат. Лит. 1986.-432 с.
7. Бражник Д.О. Анализ сходи мости алгоритма компенсации информационных потоков / Д.О.Бражник, О.М. Бражник, Ф.Б Рогальский // Матеріали міжнародної наукової конференції "Інтелектульні системи прийняття рішень та проблеми обчислювального інтелекту ISDMCI'2009" 18-22 травня 2009р. м. Євпаторія, Україна: Євпаторія, 2009. – т.2 С. 253.
8. Васильев И.В. Распознающие системы / Васильев И.В.[Справочник. Изд. 2-е, перераб. и доп.] - К.:Наукова думка, 1983.- 423 с. ил.

БРАЖНИК Дмитрий Александрович – к.т.н., старший преподаватель кафедры технической кибернетики ХНТУ.

Научные интересы:

– системы распознавания образов.