УДК 532.3

П.А. Глушич, О.В. Науменко, Е.А. Стрельникова

КОЛЕБАНИЯ ЖИДКОСТИ В ЖЕСТКИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ РЕЗЕРВУАРАХ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СЕЙСМИЧЕСКИХ НАГРУЗОК

Постановка проблемы. Современное развитие техники требует создания металлических сооружений больших размеров, эксплуатация которых проходит при комплексном воздействии специфических силовых, температурных нагрузок и климатических условий. К таким объектам, в первую очередь, относятся ответственные конструкции крупногабаритных резервуаров для хранения нефти, легковоспламеняющихся жидкостей, ракетного топлива и др. Аварийный риск при эксплуатации хранилищ, связанный с сейсмической опасностью, долгое время недооценивался во многих странах, в частности, на Украине. В настоящее время признано, что некоторые емкости и хранилища расположены в местах, которые ранее рассматривались как не представляющие сейсмической опасности и, следовательно, спроектированные без учета возможного действия горизонтальной нагрузки, по устаревшим сейсмическим стандартам.

Рассмотрим резервуар, выполненный в виде жесткой цилиндрической тонкостенной конструкции. Предполагаем, что резервуар полностью или частично заполнен жидкостью, поверхность которой покрывает «плавающая» крыша. Считаем, что эта крыша является гибкой мембраной, покрывающей всю свободную поверхность жидкости. В результате воздействия сейсмической нагрузки на резервуар с жидкостью внутри резервуара начинается плескание жидкости. Вследствие этого может произойти нарушение целостности резервуара. Использование плавающих крышек может предотвратить разрушение резервуаров. Решение задачи о гашении колебаний жидкости гибкой мембраной, плавающей на ее поверхности, состоит из двух этапов.

На первом - задача о нахождении колебаний свободной поверхности жидкости в жестком цилиндрическом резервуаре под действием сейсмической нагрузки сводится к нахождению гармонической функции $\varphi(\rho,\theta,t)$ из следующих уравнений:

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0 \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{S_1} = 0 \\ \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + g\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{S_0} = 0 \end{cases}, \qquad (1)$$

где **n** – нормаль к свободной поверхности S_0, g – ускорение свободного падения. Второе уравнение в (1) представляет собой условие непротекания, третье является следствием кинематического условия и условия равенства давления на свободной поверхности жидкости атмосферному.

На втором этапе решается задача о колебаниях «плавающей» крыши, которая описывается уравнениями

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho_m}\Delta u + \frac{\rho_l g h(\rho,\varphi,t)}{\rho_m}, \qquad (2)$$

$$u(\rho,\varphi,t)|_{\rho=R} = 0, \qquad (3)$$

где $h(\rho,\varphi,t)$ – уровень подъема свободной поверхности жидкости в жестком вертикальном цилиндрическом резервуаре под действием сейсмической нагрузки.

Анализ публикаций по теме исследования. Задачи расчета колебаний жидкости в жестких цилиндрических резервуарах под действием сейсмических нагрузок рассматривалась многими авторами [1-3]. В таких задачах применяется метод разделения переменных Фурье. Этот метод позволяет свести задачу к дифференциальному уравнению, для решения которого целесообразно применять методы численного анализа.

Цель статьи. Целью данного исследования является решение задачи об определении колебаний мембраны, плавающей на поверхности жидкости в жестком цилиндрическом резервуаре, под действием сейсмической нагрузки. Решение основано на применении метода разделения переменных Фурье, приводящего к необходимости численного решения дифференциальных уравнений. Решение такой задачи позволит определить уровень гашения колебаний жидкости плавающей мембраной.

Колебания мембраны на поверхности жидкости под действием сейсмической нагрузки.

Рассматривается жесткий цилиндрический резервуар, заполненный жидкостью (рис.1).

Вначале решалась задача о колебаниях свободной поверхности жидкости в жестком цилиндрическом сосуде под действием сейсмической нагрузки. Эта задача описывается системой уравнений (1).

Указанная задача сводится к решению дифференциальных уравнений

$$\ddot{d}_j(t) + \omega_j^{\,2} d_j(t) + \frac{2a_s(t)}{[J_2(\varepsilon_j)]^2 ch\left(\frac{\varepsilon_j H}{R}\right)} \int_0^R \frac{\rho^2}{R^2} J_1\left(\frac{\varepsilon_j}{R}\rho\right) d\rho = 0 \qquad (4)$$

при нулевых начальных условиях

$$d_j(0) = \dot{d}_j(0) = 0: \quad j = 1,2,3 \dots n,$$

где $\omega_i = \sqrt{\frac{\varepsilon_i}{R} g \ \mathrm{th}\left(\frac{\varepsilon_i H}{R}\right)}$ - собственные частоты колебаний жидкости в жесткой цилиндрической оболочке. В (4) $J_1\left(\frac{\varepsilon_j}{R}\rho\right)$, $J_2(\varepsilon_j)$ - функции Бесселя, ε_j - корни уравнения $J_1'(\rho) = 0$.

В качестве горизонтального ускорения $a_s(t)$ взяты данные акселограммы землетрясения, произошедшего в 1981 году в Иране, ускорение $a_s(t)$ из-за сложного вида представлено в виде интерполированной функции. Отметим, что рассмотрение только горизонтального сейсма не нарушает общности, так как структура уравнений (1) позволяет учесть вертикальную составляющую путем изменения g.

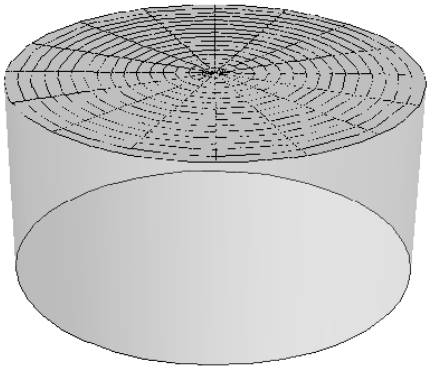

Рис. 1. Общий вид резервуара.

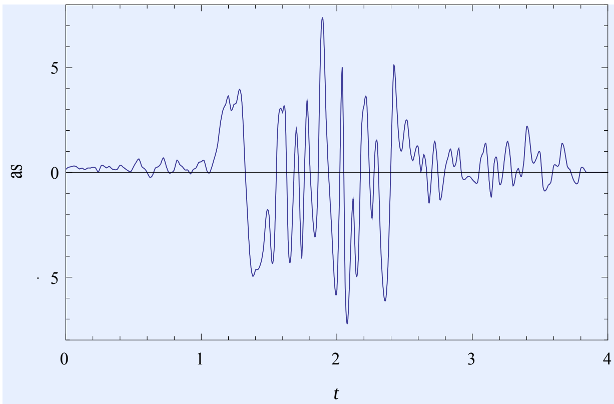

Рис. 2. Акселограмма землетрясения

Численное решение уравнения (4) имеет вид, представленный на рис. 3. На рис.4 показана форма свободной поверхности жидкости.

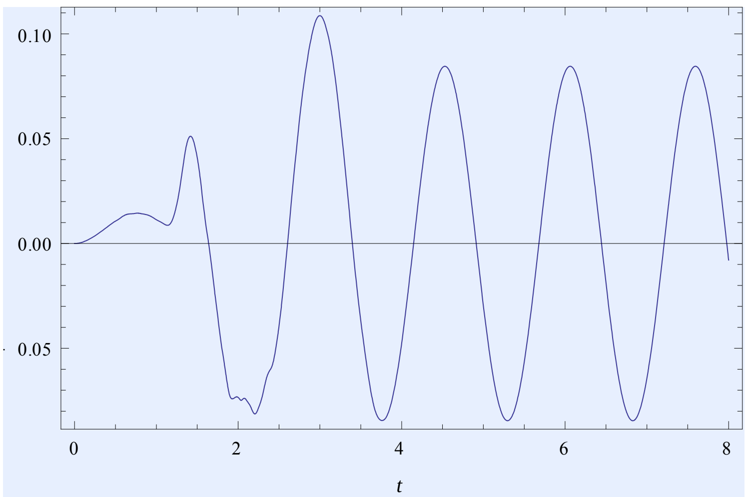

Рис. 3. Амплитуда колебаний мембраны

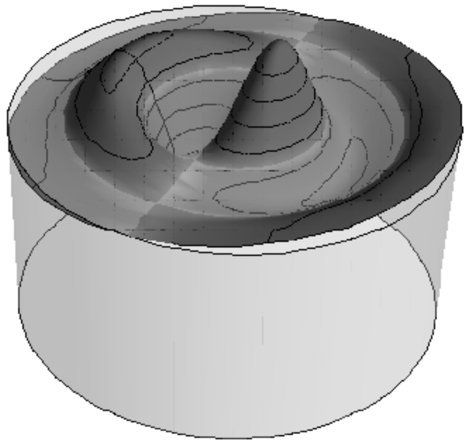

Рис. 4. Форма колебаний свободной поверхности жидкости

Задача о колебаниях мембраны на поверхности жидкости в жестком цилиндрическом резервуаре описывается уравнениями (2), (3). В уравнении (2) $h(\rho, \varphi, t)$ выражается из решения задачи о колебаниях свободной поверхности жидкости в жестком резервуаре и имеет вид

$$h(\rho,\varphi,t) = \cos\Theta \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon_i}{R} sh\left(\frac{\varepsilon_i H}{R}\right) J_1\left(\frac{\varepsilon_i}{R}\rho\right) d_i(t). \quad (5)$$

Система уравнений, описывающих колебания мембраны на поверхности жидкости, выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho_m}\Delta u + \frac{\rho_l g}{\rho_m}\cos\Theta \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon_i}{R} sh\left(\frac{\varepsilon_i H}{R}\right) J_1\left(\frac{\varepsilon_i}{R}\rho\right) d_i(t), \quad (6)$$

$$u(\rho,\varphi,t)|_{\rho=R} = 0 \quad (7)$$

Представляем решение в виде ряда Фурье-Бесселя

$$u(\rho,\varphi,t) = \sum_{n=0}^{\infty} b(t)\cos(n\varphi) J_n\left(\mu\frac{\rho}{R}\right). \quad (8)$$

Уравнение (6) сводится к дифференциальным уравнениям

$$\ddot{b}_n(t) + \mu^2 a^2 b_n(t) - f_n(t) = 0, \quad (9)$$

где $f_n(t)$ имеет вид

$$f_n(t) = C\int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{\rho_l g}{\rho_m}\cos\varphi \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_i}{R} sh\left(\frac{\varepsilon_i H}{R}\right) J_1\left(\frac{\varepsilon_i}{R}\rho\right)\cos(n\varphi)\, d_i(t)\, J_n\left(\mu\frac{\rho}{R}\right)\rho d\rho d\varphi \quad (10)$$

$$C = \frac{2}{\pi R^2 J_{n+1}^2(\mu)} \quad (11)$$

Численное решение уравнения (9) осуществлялось методом Рунге-Кутта 4-5 порядков, его график как функция времени показан на рис. 5.

На рис. 6 показана форма колебаний мембраны. В сравнении с рис. 4 видим, что плескания жидкости в цилиндрическом баке гасятся при помощи плавающей мембраны.

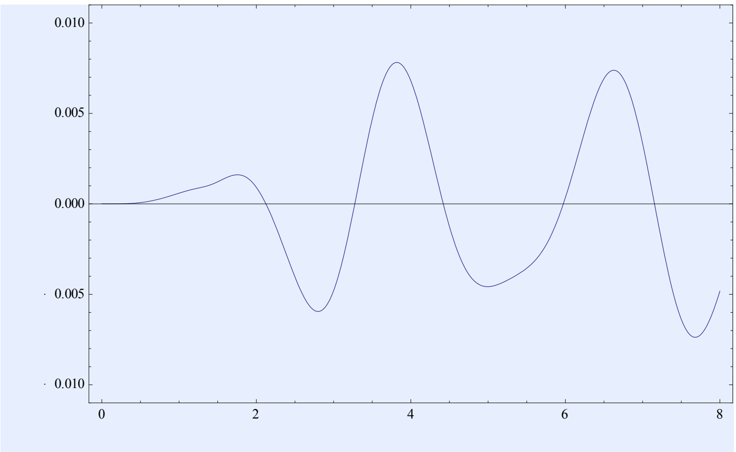

Рис. 5. Амплитуда колебаний мембраны

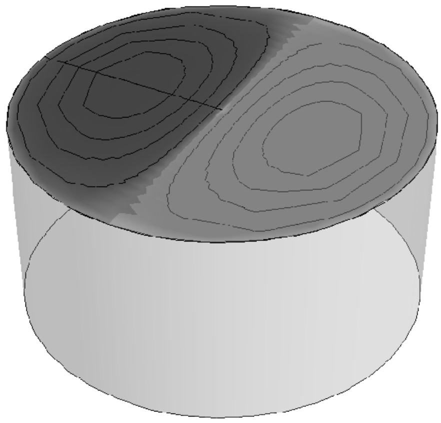

Рис. 6. Форма колебаний мембраны

Выводы и перспективы дальнейших исследований. Решена задача колебаний мембраны на поверхности жидкости в жестком цилиндрическом резервуаре под действием сейсмической нагрузки. Данные, полученные в работе могут быть использованы при проектировании резервуаров, размещаемых в сейсмически активных регионах.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Золотенко Г.Ф. О математических моделях сейсмических колебаний свободной поверхности жидкости в вертикальном цилиндрическом резервуаре .- Прикладна гідромеханіка. 2005. — Т. 7, № 1. — с. 22-42.
2. Raouf A. Ibrahim. Liquid Sloshing Dynamics: Theory and Applications. - Cambridge University Press. 2005 - 970 p.
3. K.Komatsu, M.Nishimoto, “Liquid damping in a concentric membrane tank”

ГЛУШИЧ Петр Александрович – аспирант Института проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины.

Научные интересы:

- математическое моделирование колебаний жидкости в резервуарах, численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений.

НАУМЕНКО Ольга Васильевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физики Харьковского национального аэрокосмического университета «ХАИ».

Научные интересы:

- применение сингулярных интегральных уравнений в механике сплошной среды, методика преподавания фундаментальных дисциплин в высшей школе.

СТРЕЛЬНИКОВА Елена Александровна – доктор технических наук, профессор, ведущий научный сотрудник Института проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины.

Научные интересы:

- сингулярные и гиперсингулярные интегральные уравнения, гидроупругость, метод дискретных особенностей.