УДК 514.763

М.Ф.Гребенюк, М.В.Терехова, В.И.Макаров

К ГЕОМЕТРИИ СВЯЗНОСТЕЙ НЕЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

Постановка проблемы. Задачи, возникающие при изучении оснащенных многообразий, в зависимости от типа оснащения, характера объемлющего пространства и исходного погруженного многообразия, оказываются весьма разнообразными, что делает проблему построения дифференциальной геометрии оснащенных многообразий неисчерпаемой. Свое широкое применение они находят в современной теоретической физике, а также во многих областях прикладной геометрии в связи с их приложением в технике.

Данная статья посвящена вопросам дифференциальной геометрии тангенциально-вырожденной поверхности, ассоциированной с гиперполосой многомерного проективного пространства с заданной невырожденной квадрикой. Результаты исследования могут быть использованы в геометрическом моделировании и решении гидротехнических задач.

Анализ публикаций по теме исследования. Благодаря работам Э. Картана, В. В. Вагнера, А.П.Нордена, Г. Ф. Лаптева, Ю. Г. Лумисте, В. И. Близникаса, Н. М. Остиану, А. П. Широкова, Л.Е.Евтушика и др. теория связностей представляет собой обширную область исследования расслоенных пространств и занимает существенное место в дифференциальной геометрии. Специальное место в общей теории занимает теория связностей в однородных расслоениях. Связность в однородном расслоении вводится как дифференцируемое распределение, удовлетворяющее некоторым дополнительным условиям. В.В. Вагнер рассматривает не только однородные расслоения, но также расслоения, типовыми слоями которых являются гладкие многообразия, и вводит в них связности с помощью систем дифференциальных уравнений определенного вида в локальных координатах. Г.Ф.Лаптев ограничивается линейными связностями, определяя их как множества отображений бесконечно близких слоев расслоения, удовлетворяющие определенным условиям.

Цель статьи. Построить два пространства аффинной связности на тангенциально-вырожденной поверхности неевклидового пространства. Установить двойственность полученных пространств, присоединенных к гиперполосе внутренним инвариантным образом в дифференциальной окрестности третьего порядка образующего элемента.

В работе применяется метод неподвижного репера, исчисление внешних форм и теоретико-групповой метод Г.Ф. Лаптева [4]. Статья является продолжением работы [2], в которой в различных дифференциальных окрестностях образующего элемента с помощью соприкасающихся гиперквадрик гиперполосы получены инвариантные двойственные нормализации, в том числе нормализация в смысле Э.Картана. Используются результаты работ [1] и [3], где приведено построение пары аффинных связностей, ассоциированных с гиперполосой.

Основная часть. Рассмотрим в пространстве ${}^{\ell}S_n$ (в проективном пространстве P_n с невырожденной гиперквадрикой индекса ℓ) плоский элемент (A,τ), состоящий из точки A и инцидентной ей гиперплоскости τ. Пусть точка А описывает поверхность V_r, а гиперплоскость $\tau(A)$ касается плоскости V_r в соответствующих точках $A \in V_r$. Многовид таких плоских элементов (A,τ) образует гиперполосу $SH_r \subset {}^{\ell}S_n$, которая в отношении подвижного автополярного репера $\{A_o, A_1, \ldots, A_n\}$ определяется в виде:

$$
\begin{aligned}
&\omega_o^{\mathrm{n}} = 0, \quad \omega_o^{\alpha} = 0, \quad \omega_\alpha^{\mathrm{n}} = 0, \quad \omega_{\mathrm{n}}^{\mathrm{o}} = 0, \quad \omega_{\mathrm{n}}^{\alpha} = 0, \quad \omega_{\alpha}^{\mathrm{o}} = 0,\\
&\omega_{\mathrm{i}}^{\mathrm{n}} = a_{ij}\omega^{\mathrm{j}}, \quad \nabla a_{ij} = -a_{ij}\omega_{\mathrm{n}}^{n} - a_{ijk}\omega^{\mathrm{k}},\\
&\omega_{\alpha}^{\mathrm{i}} = b_{\alpha\mathrm{j}}^{\mathrm{i}}\omega^{\mathrm{j}}, \quad \nabla b_{\alpha\mathrm{j}}^{\mathrm{i}} = b_{\alpha\mathrm{jk}}^{\mathrm{i}}\omega^{\mathrm{k}},\\
&\omega_i^{\alpha} = b_{\mathrm{ij}}^{\alpha}\omega^{\mathrm{j}}, \quad \nabla b_{\mathrm{ij}}^{\alpha} = b_{\mathrm{ijk}}^{\alpha}\omega^{\mathrm{k}},\\
&\omega_i^{o} = -\varepsilon_{\mathrm{oi}}\omega^{\mathrm{i}}, \quad \omega_{\mathrm{n}}^{\mathrm{i}} = -\varepsilon_{\mathrm{in}}a_{ij}\omega^{\mathrm{j}},
\end{aligned}
$$

при этом $b_{\alpha j}^{\mathrm{i}} a_{i\ell} = b_{\alpha\ell}^{\mathrm{i}} a_{ij}, b_{ik}^{\alpha} = -\varepsilon_{\alpha\mathrm{i}} b_{\alpha}^{\mathrm{ij}} a_{jk}, b_{\alpha\mathrm{k}}^{\mathrm{i}} = b_{\alpha}^{\mathrm{ij}} a_{jk}$, функции $b_{\alpha\mathrm{jk}}^{\mathrm{i}}$ симметричны индексам *j, k.*

Системы величин $\Gamma_2 = \{a_{ij}, b_{\alpha\mathrm{j}}^{\mathrm{i}}\}, \Gamma_3 = \{\Gamma_2, a_{ijk}, b_{\alpha\mathrm{jk}}^{\mathrm{i}}\}$ образуют фундаментальные объекты соответственно второго и третьего порядков гиперполосы $SH_r \subset {}^{\ell}S_n$.

Используя тензор Дарбу [4]

$$\ell_{ijk} = a_{ijk} - a_{(ij}d_{k)},$$

строим симметрический тензор

$$L_{ij} = a^{k\ell}a^{mp}\ell_{ikm}\ell_{j\ell p},$$

$$\nabla_{\delta}L_{ij} = 0,$$

который в общем случае является невырожденным, т.е. существует взаимный ему тензор L^{ij}:

$$L^{ij}L_{jk} = \delta^{i}_{k},$$

$$\nabla_{\delta}L^{ij} = 0.$$

Аффинную связность ∇ будем присоединять к тангенциально–вырожденной поверхности V^{r}_{n-1}, индуцированной гиперполосой SH_r, внутренним инвариантным образом в дифференциальной окрестности третьего порядка образующего элемента.

Система форм $\left\{\omega^{\mathrm{n}}_{\mathrm{i}}, \theta^{j}_{i}\right\}$, полученная из форм $\omega^{\mathrm{j}}_{\mathrm{i}}$ с помощью преобразования [5], [6]:

$$\theta^{j}_{i} = \omega^{\mathrm{j}}_{\mathrm{i}} - \delta^{\mathrm{j}}_{\mathrm{i}}\omega^{\mathrm{n}}_{\mathrm{n}} - \Gamma^{j\ell}_{i}\,\omega^{\mathrm{n}}_{\ell},$$

удовлетворяет структурным уравнениям Картана–Лаптева:

$$D\omega^{n}_{i} = \theta^{j}_{i} \wedge \omega^{\mathrm{n}}_{\mathrm{j}} + \mathrm{T}^{j\ell}_{i}\,\omega^{\mathrm{n}}_{\ell} \wedge \omega^{\mathrm{n}}_{\mathrm{j}},$$

$$D\theta^{j}_{i} = \theta^{\ell}_{i} \wedge \theta^{j}_{\ell} + \omega^{\mathrm{n}}_{\ell} \wedge \Delta\Gamma^{j\ell}_{i},$$

где $\quad T^{j\ell}_{i} = \Gamma^{[j\ell]}_{i}$,

$$\Delta\Gamma^{j\ell}_{i} = \nabla\Gamma^{j\ell}_{i} - \Big(\Gamma^{k\ell}_{i}\,\Gamma^{jp}_{k} - a^{j\ell}\varepsilon_{\mathrm{oi}}a^{ip} + a^{k\ell}a^{mp}b^{\mathrm{j}}_{\alpha\mathrm{k}}b^{\alpha}_{im} -$$

$$- \varepsilon_{\mathrm{jn}}\delta^{\ell}_{\mathrm{j}}\delta^{\mathrm{p}}_{\mathrm{i}} + \varepsilon_{\ell\mathrm{n}}\delta^{\mathrm{j}}_{\mathrm{i}}\delta^{p}_{\ell}\Big)\omega^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}}.$$

Охват объекта аффинной связности ∇ гиперполосы SH_r можно осуществить с помощью компонент фундаментального объекта третьего порядка этой гиперполосы по следующей формуле:

$$\Gamma^{j\ell}_{i} = \mathrm{L}^{j\ell}d_{i}.$$

Таким образом, формы аффинной связности ∇, внутренним образом присоединенной к гиперполосе SH_r, имеют следующий вид:

$$\omega^{n}_{i}, \quad \theta^{j}_{i} = \omega^{\mathrm{j}}_{\mathrm{i}} - \delta^{\mathrm{j}}_{\mathrm{i}}\omega^{\mathrm{n}}_{\mathrm{n}} - L^{j\ell}d_{i}\omega^{\mathrm{n}}_{\ell}.$$

Определим еще одно пространство аффинной связности системой форм, полученной из форм θ^{i}_{j}:

$$\omega^{\mathrm{n}}_{\mathrm{i}}, \quad \bar{\theta}^{j}_{i} = \theta^{j}_{i} - \bar{\Gamma}^{j\ell}_{i}\,\omega^{\mathrm{n}}_{\ell}.$$

Эта система $\left\{\omega^{\mathrm{n}}_{\mathrm{i}}, \bar{\theta}^{j}_{i}\right\}$ удовлетворяет структурным уравнениям Картана–Лаптева:

$$D\omega^{n}_{i} = \bar{\theta}^{\ell}_{i} \wedge \omega^{\mathrm{n}}_{\ell} + \left(\mathrm{T}^{j\ell}_{i} + \bar{\mathrm{T}}^{j\ell}_{i}\right)\omega^{\mathrm{n}}_{\ell} \wedge \omega^{\mathrm{n}}_{\mathrm{j}},$$

$$\omega_{\mathrm{i}}^{\mathrm{n}}, \quad \bar{\theta}_i^j = \theta_i^j - \bar{\Gamma}_i^{j\ell}\,\omega_\ell^{\mathrm{n}}.$$

где $\quad \bar{T}_i^{j\ell} = \bar{\Gamma}_i^{[j\ell]}$,

$$\Delta\bar{\Gamma}_i^{j\ell} = \nabla\bar{\Gamma}_i^{j\ell} - \bar{\Gamma}_i^{j\ell}\,\omega_{\mathrm{n}}^{\mathrm{n}} + \frac{1}{2}R_i^{j\ell p}\,\omega_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} + \left(\bar{\Gamma}_i^{kp}\,\bar{\Gamma}_k^{j\ell} - \Gamma_i^{k\ell}\,\Gamma_k^{jp} + \bar{\Gamma}_k^{j\ell}\,\Gamma_i^{kp}\right)\omega_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}}.$$

Охват объекта аффинной связности $\bar{\nabla}$ гиперполосы SH_r строим следующим образом:

$$\bar{\Gamma}_i^{j\ell} = a^{j\ell k}a_{ki}.$$

Таким образом, формы аффинной связности $\bar{\nabla}$ имеют вид:

$$\omega_i^n, \quad \bar{\theta}_i^j = \theta_i^j - a^{j\ell k}a_{ki}\omega_\ell^{\mathrm{n}}.$$

Согласно результатам, приведенных в труде[7], преобразования форм $\omega^{\mathrm{J}}_{\mathrm{I}}$ по закону

$$\overline{\omega}_{\mathrm{o}}^{\mathrm{n}} = \omega_{\mathrm{o}}^{\mathrm{n}} = 0, \quad \overline{\omega}_{\mathrm{o}}^{\alpha} = \omega_{\mathrm{o}}^{\alpha} = 0, \quad \overline{\omega}_{\alpha}^{\mathrm{n}} = \omega_{\alpha}^{\mathrm{n}} = 0, \quad \overline{\omega}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{o}} = \omega_{\mathrm{n}}^{\mathrm{o}} = 0, \tag{1}$$

$$\overline{\omega}^{i} = \omega^{\mathrm{i}}, \quad \overline{\omega}_{\mathrm{o}}^{\mathrm{o}} = -\omega_{\mathrm{n}}^{\mathrm{n}}, \quad \overline{\omega}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{n}} = -a_{ik}\omega^{\mathrm{k}}, \quad \overline{\omega}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{o}} = a_{ik}\omega_{\mathrm{n}}^{\mathrm{k}},$$

$$\overline{\omega}_{\mathrm{j}}^{\mathrm{i}} = \omega_{\mathrm{j}}^{\mathrm{i}} - \delta_{\mathrm{j}}^{\mathrm{i}}\omega_{\mathrm{n}}^{\mathrm{n}} + a^{is}a_{sjk}\omega^{\mathrm{k}}, \quad \overline{\omega}_{\gamma}^{\alpha} = -\omega_{\alpha}^{\gamma}, \quad \overline{\omega}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{i}} = -a^{ik}\omega_{\mathrm{k}}^{\mathrm{o}}, \tag{1*}$$

$$\overline{\omega}_{\mathrm{i}}^{\alpha} = -a_{ik}\omega_{\alpha}^{\mathrm{k}}, \quad \overline{\omega}_{\alpha}^{\mathrm{i}} = -a^{ik}\omega_{\mathrm{k}}^{\alpha}, \quad \overline{\omega}_{\mathrm{n}}^{\alpha} = -\omega_{\alpha}^{\mathrm{o}} = 0, \quad \overline{\omega}_{\alpha}^{\mathrm{o}} = \omega_{\mathrm{n}}^{\alpha} = 0$$

может быть инволютивным, причем инволютивность нарушается лишь относительно форм (1*).

Из соотношений (1) имеем:

$$d\overline{a}^{ij} + \overline{a}^{kj}\overline{\omega}_{\mathrm{k}}^{\mathrm{i}} + \overline{a}^{ik}\overline{\omega}_{\mathrm{k}}^{\mathrm{j}} - \overline{a}^{ij}\overline{\omega}_{\mathrm{o}}^{\mathrm{o}} = \overline{a}^{ijs}\omega_{\mathrm{s}}^{\mathrm{n}},$$

где $\overline{a}^{ijs} = a^{ijs}$.

Следовательно, $\qquad \theta_i^j = \bar{\theta}_i^j - \overline{a}^{j\ell k}\overline{a}_{ki}\omega_\ell^{\mathrm{n}}.$

Таким образом, формы аффинных связностей ∇ и $\bar{\nabla}$ преобразуются друг в друга по инволютивному закону.

Выводы и перспективы дальнейших исследований. Два двойственных пространства аффинной связности ∇ и $\bar{\nabla}$ присоединены к тангенциально–вырожденной поверхности V_{n-1}^r (индуцированной гиперполосой SH_r) в дифференциальной окрестности третьего порядка образующего элемента. Двойственность выполняется относительно преобразования по инволютивному закону (1).

ЛИТЕРАТУРА:

1. Гребенюк М.Ф., Терехова М.В., Макаров В.І. Биекция нормалей гиперполосы в неевклидовом пространстве. Збірник наукових праць «Геометричне та компютерне моделювання», Харків: ХДУХтаТ, 2009, с.40-45.
2. Гребенюк М.Ф., Терехова М.В., Макаров В.І. Нормализация гиперполос в неевклидовом пространстве, Геометричне та комп'ютерне моделювання, в.26. – Харків: Харківський державний університет харчування та торгівлі, 2010, с.85-89.
3. Гребенюк М.Ф., Терехова М.В., Макаров В.І. Пространства аффинной связности, Міжвідомчий науково-технічний збірник "Прикладна геометрія та інженерна графіка", в.84. – Київ: Київський національний університет будівництва і архітектури, 2010, с..305-309.
4. Лаптев Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований. Тр. Моск.матем.о-ва. -1953.- Т.2.- с. 275-382.
5. Лаптев Г.Ф. Многообразия, погруженные в обобщенные пространства. Тр. 4-го Всес. матем. съезда. – Л.: Наука, 1961,1964. - Т.2. – С. 226-233.
6. Лаптев Г.Ф., Остиану Н.М. О распределениях m-мерных линейных элементов в n-мерном проективном пространстве. Ин-т науч. информ. АН СССР. – 1971. - 16с. – Рус. - Деп. - №3683-71
7. Норден А.П. Пространства аффинной связности. М., Л.. Гостехиздат. 1950.

ГРЕБЕНЮК Марина Федоровна – д.т.н., профессор кафедры экономической кибернетики Национального авиационного университета (г.Киев).

Научные интересы:

- изучение проблемы геометрических преобразований многомерных аффинных пространств.

ТЕРЕХОВА Марина Викторовна - доцент кафедры прикладной геометрии и компьютерной графики Национального авиационного университета (г. Киев).

Научные интересы:

- изучение проблемы геометрических преобразований многомерных аффинных пространств.

МАКАРОВ Василий Иванович - доцент кафедры прикладной геометрии и компьютерной графики Национального авиационного университета (г. Киев).

Научные интересы:

- изучение проблемы геометрических преобразований многомерных аффинных пространств.