

УПРУГИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ РЕЗИНОКОРДНОГО МАТЕРИАЛА С УЧЕТОМ  
ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ СВОЙСТВ КОРДА

**Постановка проблемы.** Резинокордные материалы находят широкое применение в различных отраслях промышленности, транспорта, строительства и других. Одним из основных расчетов, выполняемых при проектировании резинокордных конструкций, является определение напряженно-деформированного состояния. Такой расчет и для волокнистых композитов, и для резинокордного материала в частности, является сложной математической задачей. Дополнительные сложности возникают ввиду необходимости учета в математической модели влияния каждого волокна. Это приводит к громоздким математическим моделям и трудностям при их использовании. Поэтому более удобным с точки зрения инженерной практики является подход, в основе которого представление неоднородного композиционного материала однородным трансверсально-изотропным материалом, с другими свойствами «близкими» упругим свойствам композита. Свойства такого трансверсально-изотропного материала определяются через упругие характеристики матрицы и армирующих волокон, их объемные доли в композите, размеры и взаимное расположение армирующих элементов.

Для описания упругих свойств однородного трансверсально-изотропного материала необходимо определить 5 независимых величин: продольный модуль упругости  $E_1$  (в направлении армирования), поперечный модуль упругости  $E_2$ , модуль продольного сдвига  $G_{12}$ , модуль поперечного сдвига  $G_{23}$  и коэффициент Пуассона  $\nu_{12}$ . В случае плоской задачи теории упругости таких независимых упругих характеристики – четыре.

Учет тех или иных особенностей деформирования волокнистых композитов и введение упрощающих гипотез приводит к созданию тех или иных теорий, описывающих упругие свойства волокнистого композиционного материала. Применительно к резинокордным материалам следует учитывать ряд специфических свойств таких материалов, в частности, ярко выраженные анизотропные свойства корда и слабую сжимаемость резины. Поэтому разработка новых и совершенствование уже существующих теорий для определения упругих постоянных резинокордного материала является актуальной задачей.

**Анализ публикаций по теме исследования.** Наиболее распространенные способы определения упругих постоянных для резинокордного материала следующие. Для решения плоской задачи теории упругости упругие постоянные резинокордного материала предложены в работе Лапина А.А [1]. Учет тех или иных особенностей деформирования резинокордных материалов при определении упругих констант был проведен в работах [2, 3].

Упрощенная группа соотношений для определения упругих постоянных резинокордного материала описана в работе [4].

Соотношения, являющиеся частным случаем формул, предложенных в работе [1], и справедливые лишь для резинокордных композитов, т.е. если предположить, что  $E_c \gg E_m$ ,  $\nu_m = 0,5$ ,  $G_m = E_m/3$  ( $E_c$  – модуль упругости корда,  $E_m$  – модуль упругости матрицы,  $G_m$  – модуль сдвига матрицы,  $\nu_m$  – коэффициент Пуассона матрицы) предложены в работе [5].

Для решения трехмерных задач механики композитов предложен ряд соотношения для определения упругих постоянных. Для простейшей модели композиционного материала – системы жестко связанных чередующихся изотропных стержней, обладающих характеристиками волокна, и матрицы – предложены соотношения, полученные на основе уравнения аддитивности или правила смесей [6]. В работе Аболиньша Д.С. [7] также описана группа формул для решения пространственной задачи механики волокнистых композиционных материалов. С использованием теории функций комплексной переменной представлены соотношения для определения упругих характеристик волокнистого композита [8].

Упругие постоянные с учетом анизотропии корда для композиционного материала предложены в работе [9], а для резинокордного в работе – [10]. Применение метода конечных элементов к определению упругих постоянных композиционного материала изложено в работе [11]. В работах [12-14] найдены упругие постоянные волокнистого композиционного материала с трансверсально-изотропными матрицей и волокном.

**Цель статьи.** Получить соотношения для определения упругих постоянных резинокордного материала с учетом таких особенностей его составляющих как несжимаемость резины и

трансверсально-изотропные свойства корда. Исследовать изменение упругих постоянных резинокордного материала в зависимости от соотношения резины и корда в композите.

**Основная часть.** Для моделирования трансверсально-изотропных свойств корда и несжимаемости резиновой матрицы примем следующие величины упругих постоянных резинокордного материала: модуль упругости матрицы  $E^*$  и коэффициент Пуассона  $\nu^* = 0,5$ , упругие постоянные корда  $E_1^\circ$ ,  $E_2^\circ$ ,  $\nu_{12}^\circ$ ,  $\nu_{23}^\circ$  и  $G_{12}^\circ$ . Используя более общие соотношения для волокнистого композита, полученные в работах [12-14], и принятые величины упругих постоянных матрицы и корда, найдем упругие постоянные резинокордного материала:

$$E_1 = \frac{(\alpha - 2\nu_{12}^\circ\beta)E^*(1-f) + (\alpha - \beta)E_1^\circ f}{E^*(1-f)(1 - \nu_{23}^\circ - 2\nu_{12}^\circ\nu_{21}^\circ) + 1,5E_2^\circ}, \quad (1)$$

$$\nu_{12} = \frac{\left(\frac{1}{2}\alpha - \beta\nu_{12}^\circ\right) + E_2^\circ f(2\nu_{12}^\circ - 1)}{E^*(1-f)(1 - \nu_{23}^\circ - 2\nu_{12}^\circ\nu_{21}^\circ) + \frac{3}{2}E_2^\circ}, \quad (2)$$

$$E_2 = \frac{2E^*}{\left(\alpha_1 + \frac{3(\gamma - 2E^*)(f(d_{11} - d_{21}) + (d_{22} - d_{12})))}{d_{11}d_{22} - d_{21}d_{12}}\right)}, \quad (3)$$

$$E_2 = \frac{2E^*}{\left(\alpha_1 + \frac{3(\gamma - 2E^*)(f(d_{11} - d_{21}) - d_{22} + d_{12}))}{d_{11}d_{22} - d_{21}d_{12}}\right)}, \quad (4)$$

$$\nu_{23} = \left(3 - \alpha_1 + \frac{3(\gamma - 2E^*)(f(d_{11} - d_{21}) + (d_{22} - d_{12})))}{d_{11}d_{22} - d_{21}d_{12}}\right) / \left(\alpha_1 + \frac{3(\gamma - 2E^*)(f(d_{11} - d_{21}) + (d_{22} - d_{12})))}{d_{11}d_{22} - d_{21}d_{12}}\right), \quad (5)$$

$$\nu_{23} = \left(3 - \alpha_1 + \frac{3(\gamma - 2E^*)(f(d_{11} - d_{21}) - d_{22} + d_{12}))}{d_{11}d_{22} - d_{21}d_{12}}\right) / \left(\alpha_1 + \frac{3(\gamma - 2E^*)(f(d_{11} - d_{21}) - d_{22} + d_{12}))}{d_{11}d_{22} - d_{21}d_{12}}\right), \quad (6)$$

$$G_{12} = \frac{E^*(E^*(1-f) + 3G_{12}^\circ(f+1))}{3(3G_{12}^\circ(1-f) + E^*(f+1))}, \quad (7)$$

где  $f$  – коэффициент армирования, характеризующий относительное объемное содержание корда в композите,

$$\alpha = E^*(1-f)(1 - \nu_{23}^\circ) + \frac{1}{2}E_2^\circ(f+3), \quad \beta = \nu_{21}^\circ E^*(1-f) + \frac{1}{2}fE_2^\circ, \quad \gamma = E^*(1 - \nu_{23}^\circ) + \frac{3}{2}E_2^\circ,$$

$$\alpha_1 = \frac{3}{2} + \frac{3f(\gamma - 2E_2^\circ) + \gamma}{2\alpha} + \frac{2E_1^\circ E^* f(f-1) \left(\frac{1}{2}\gamma - 2\nu_{21}^\circ E^*\right)^2}{\alpha E^* (\alpha(E_1^\circ f + E^*(1-f)) - \beta(E_1^\circ f + 2\nu_{12}^\circ E^*(1-f)))}$$

$$d_{11} = \frac{3}{2}E_2^\circ \left(2f - 3 - \frac{1}{f^2}\right) - E^* \left(3\left(\frac{1}{f^2} - 1\right)(1 + \nu_{23}^\circ) + 4\left(f - \frac{1}{f^2}\right)(\nu_{23}^\circ + \nu_{21}^\circ\nu_{12}^\circ)\right),$$

$$d_{12} = \frac{3}{2} E_2^\circ \left( \left( \frac{1}{f} - f \right) - 2 \right) - E^* \left( \left( 4 - f - \frac{3}{f} \right) (1 + \nu_{23}^\circ) + 4 \left( \frac{1}{f} - 1 \right) (\nu_{23}^\circ + \nu_{21}^\circ \nu_{12}^\circ) \right),$$

$$d_{21} = \frac{3}{2} E_2^\circ \left( 4f + \left( \frac{1}{f^2} - 3 \right) \right) - E^* \left( 3 \left( \frac{1}{f^2} - 1 \right) (1 + \nu_{23}^\circ) + 2 \left( f - \frac{1}{f^2} \right) (3 + \nu_{23}^\circ - 2\nu_{21}^\circ \nu_{12}^\circ) \right),$$

$$d_{22} = \frac{3}{2} E_2^\circ \left( -f - \frac{1}{f} \right) - E^* \left( \left( 4 - f - \frac{3}{f} \right) (1 + \nu_{23}^\circ) + 2 \left( \frac{1}{f} - 1 \right) (3 + \nu_{23}^\circ - 2\nu_{21}^\circ \nu_{12}^\circ) \right).$$

Упругие постоянные (3) и (5) получены с помощью кинематического критерия согласования из равенства радиальных перемещений, а (4) и (6) – с помощью кинематического критерия согласования из равенства окружных перемещений.

Рассмотрим резинокордный материал со следующими упругими характеристиками [10]: продольный модуль упругости текстильного корда 23КНТС  $E_1^\circ = 1277,5$  МПа,  $E_1^\circ = E_2^\circ$ , продольный модуль сдвига  $G_{12}^\circ = 4,9$  МПа, коэффициенты Пуассона  $\nu_{12}^\circ = 0,52$  и  $\nu_{23}^\circ = 1$ , модуль упругости резины марки 2и8338  $E^* = 4,4$  МПа.

На рисунках 1 и 2 представлена зависимость упругих характеристик резинокордного материала от объемного содержания корда в диапазоне  $f = 0,1 \div 0,7$ . Как можно заметить из приведенных графиков объемное содержание волокна в композите для данного резинокордного материала практически не влияет на коэффициенты Пуассона  $\nu_{23}$ ,  $\nu_{12}$  и модуль продольного сдвига  $G_{12}$ . В то же время увеличение объемного содержания корда приводит к значительному увеличению  $E_2$ , причем различие при расчете по формулам (3) и (4), при получении которых в качестве параметров условия согласования использовались различные составляющие вектора перемещений, составляет более чем в четыре раза (при  $f = 0,7$ ).

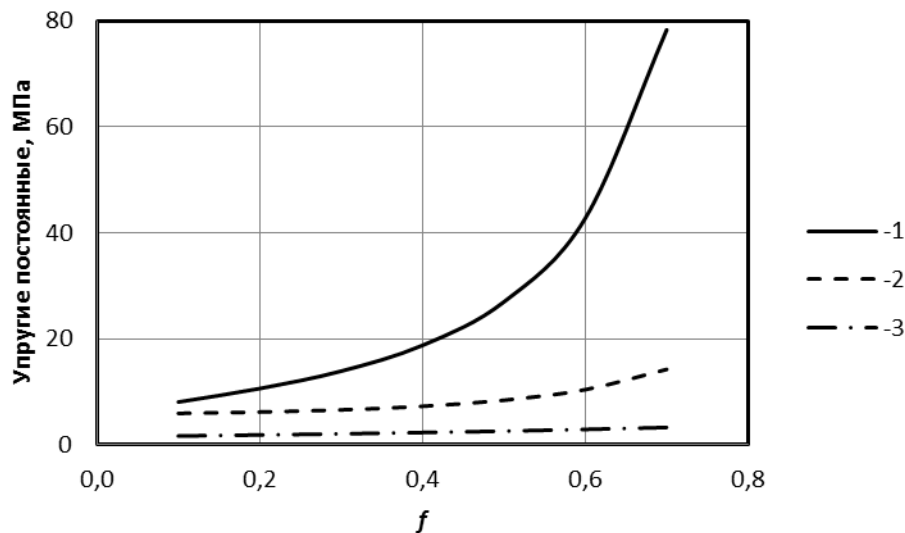


Рис.1. Зависимость модуля упругости от объемного содержания корда в композите:

1 –  $E_2$  (формула(3)), 2 –  $E_2$  (формула(4)), 3 –  $G_{12}$

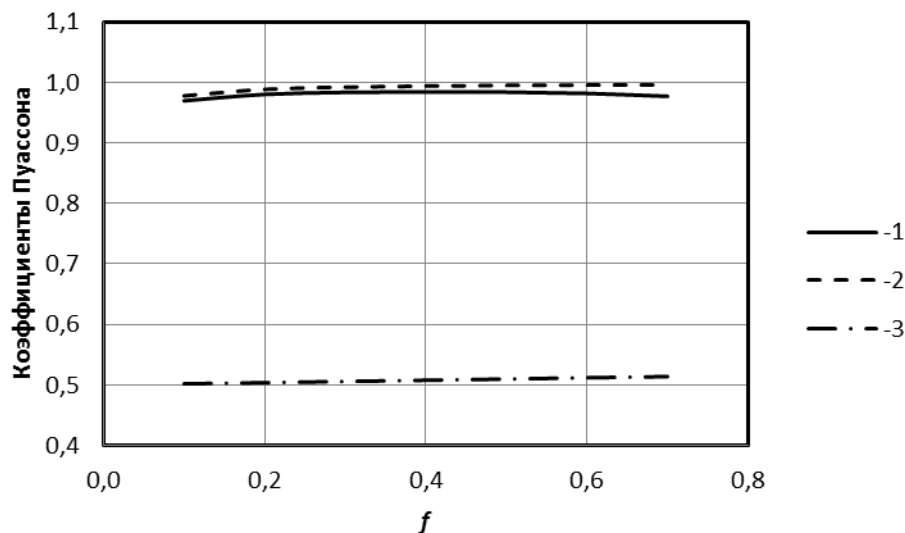


Рис.2. Зависимость коэффициента Пуассона от объемного содержания корда в композите: 1 –  $\nu_{23}$  (формула(5)), 2 –  $\nu_{23}$  (формула(6)), 3 –  $\nu_{12}$

**Выводы и перспективы дальнейших исследований.** Таким образом, получены соотношения для определения упругих постоянных резинокордного материала с учетом несжимаемости резины и трансверсально-изотропных свойств корда. Определено влияние объемного содержания корда на упругие характеристики резинокордного материала.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Лапин А.А. Плоская деформация резинокордовой ткани / А.А. Лапин // Расчеты на прочность в машиностроении. – М.: Машгиз, 1955. – С. 87-99.
2. Gough V.E. Stiffness of cord and rubber constructions / V.E. Gough // Rubber Chemistry and Technology. – 1968. – V. 41, N 4. – P. 988-1021.
3. Тангорра Г. Упрощенные расчеты многослойных резинокордных пластин как комбинации ортотропных слоев / Г. Тангорра // Труды международной конференции по каучуку и резине. – М: Химия, 1971. – С. 459-467.
4. Walter J.D. Approximate expressions for the elastic constants of cord-rubber laminates / J.D. Walter, H.P. Patel // Rubber Chemistry and Technology. – 1979. – V. 52, N 4. – P. 710-724.
5. Akasaka T. Structural mechanics of radial tires / T. Akasaka // Rubber Chemistry and Technology. – 1981. – V. 54, N 3. – P. 461-492.
6. Композиционные материалы. Справочник / Под. ред. Карпиноса Д.М. – К.: Наук. думка, 1985. – 592 с.
7. Аболиньш Д.С. Тензор податливости однонаправленно армированного упругого материала / Д.С. Аболиньш // Механика полимеров. – 1965. – № 4. – С. 52-59.
8. Ван Фо Фы Г.А. Упругие постоянные и напряженное состояние стеклоленты / Г.А. Ван Фо Фы // Механика полимеров. – 1966. – № 4. – С. 593-602.
9. Класторны М. Точная теория жесткости однонаправленных волокнисто-армированных композитов / М. Класторны, П. Кондерла, Р. Пиекарский // Механика композитных материалов. – 2009. – Т. 45, № 1. – С. 109-144.
10. Растеряев Ю.К. Составные резинокордные материалы и механика их деформирования / Ю.К. Растеряев, Г.Н. Агальцов // Геотехнічна механіка: міжвідомчий збірник наукових праць. – Дніпропетровськ, 2005. – Вип. 60. – С. 200-248.
11. Болтыров А.А. Определение упругих эффективных характеристик однонаправленного резинокордного материала / А.А. Болтыров // Восьмой симпозиум «Проблемы шин и резинокордных материалов». – М.: ООО «Научно-технический центр «НИИШП». – 2007. – Т.1. – С. 73-82.

12. Гребенюк С.Н. Упругие характеристики композиционного материала с транслопной матрицей и волокном / С.Н. Гребенюк // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла: збірник наукових праць. – Дніпропетровськ: Ліра, 2011. – Вип.12. – С. 62-68.
13. Гребенюк С.Н. Определение модуля сдвига композиционного материала с транслопными матрицей и волокном / С.Н. Гребенюк // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла: збірник наукових праць. – Дніпропетровськ: Ліра, 2012. – Вип.13. – С. 92-98.
14. Гребенюк С.М. Визначення пружних сталей композита з транслопними матрицею та волокном на основі кінематичної умови узгодження / С.М. Гребенюк // Вісник Запорізького національного університету. – Запоріжжя: ЗНУ, 2012. – № 1. – С. 62-76.

ГРИЦАК Виктор Захарович – д.т.н., профессор, Заслуженный деятель науки и техники Украины, проректор по научной работе Запорожского национального университета.

Научные интересы:

– устойчивость и динамика конструкций, механика композиционных материалов, асимптотические методы.

ГРЕБЕНЮК Сергей Николаевич – к.т.н., доцент, заведующий кафедрой математического анализа Запорожского национального университета.

Научные интересы:

– механика композиционных материалов, численные методы.