

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОТЕНЦИАЛОВ И МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ ДЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ МАГНИТНЫХ СИСТЕМ

**Постановка проблемы.** Проведенный анализ известных программных комплексов, предназначенных для определения магнитного поля систем постоянных магнитов, показал, что для получения корректных результатов, необходимо проводить их существенную настройку под конкретную конфигурацию системы (параметров интегрирования, формы и размеров сетки, и т.п.) [1-3,5]. Без такой настройки распределение полей, и особенно их пространственных производных, играющих важную роль в верном вычислении сил и моментов в индукционных системах подвеса, зачастую далеко от реального. Более того, для магнитных структур со сложной конфигурацией, например, периодических магнитных систем с цилиндрической симметрией, без наличия априорной информации об истинной конфигурации магнитного поля, зачастую затруднительно даже судить в какой мере полученное распределение поля отвечает истинному, а в какой – отражает погрешности алгоритма программы моделирования.

Всё это поднимает вопрос о необходимости создания методики и программы для вычисления точных распределений магнитного поля и потенциалов периодических магнитных структур, применяемых в системах магнитного подвеса [4].

**Основная часть.** Линейные периодические магнитные массивы как правило собираются из равномерно намагниченных отдельных элементов, представляющих собой кубы, прямоугольные параллелепипеды и элементы, форму которых можно представить как пересечение прямоугольных параллелепипедов. Магнитное поле такой системы можно представить как суперпозицию магнитных полей равномерно намагниченных прямоугольных параллелепипедов.

Как известно, внешнее поле и потенциалы объема ферромагнетика с постоянной величиной вектора намагниченности можно описать как поле зарядов, распределённых по его поверхности (метод магнитных зарядов), или поле токов, текущих по его поверхности (метод поверхностных токов). Без потери общности, при определении поля одной отдельной поверхности можно считать, что она лежит в плоскости  $y-z$ , с центром, совпадающим с началом координат. В таком случае, в точке с декартовыми координатами  $x_1, y_1, z_1$  скалярный потенциал  $\varphi$  от одной такой поверхности можно записать в виде

$$\Phi(x_1, y_1, z_1) = \int_{\Delta z/2}^{\Delta z/2 + \Delta x/2} \int_{\Delta z/2 - \Delta x/2}^{\Delta x/2} \frac{\sigma_m}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_0|} dx dz, \tag{1}$$

$$\frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_0|} = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2}},$$

где  $\sigma_m$  - поверхностная плотность магнитного "заряда",  $\Delta x, \Delta z$  - размеры прямоугольного поверхностного элемента.

Поверхностная плотность магнитного заряда связана с величиной внутреннего магнитного момента ферромагнетика  $\mu$  и внутренним магнитным полем  $B_{int}$  следующим соотношением:

$$\sigma_m = \mu(\vec{n} \cdot \vec{n}_\mu) = 2\epsilon_9 c^2 B_{int}(\vec{n} \cdot \vec{n}_\mu), \tag{2}$$

где  $\vec{n}$  - вектор внешней нормали к рассматриваемому поверхностному элементу,  $\vec{n}_\mu$  - единичный вектор направления вектора намагниченности ферромагнетика.

Векторный потенциал  $\vec{A}(r, z, \varphi)$  от элемента поверхностного тока имеет вид, аналогичный (2), за исключением замены  $\sigma_m$  на вектор поверхностной плотности тока  $\vec{j}$ . Эта величина связана с  $\mu$  и  $B_{int}$  соотношениями, схожими с (2):

$$\vec{j} = \mu(\vec{n} \times \vec{n}_\mu) = 2\epsilon_9 c^2 B_{int}(\vec{n} \times \vec{n}_\mu). \tag{3}$$

Уравнение (1) может быть аналитически проинтегрировано, что приводит к следующему выражению для скалярного магнитного потенциала:

$$\begin{aligned} \Phi(x_1, y_1, z_1) = & \frac{\sigma_m}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left( x_1 \arctan \left( \frac{(y-y_1)(z-z_1)}{x_1 \sqrt{x_1^2 + (y_1-y)^2 + (z_1-z)^2}} \right) - \right. \\ & - (z-z_1) \ln \left( y-y_1 + \sqrt{x_1^2 + (y_1-y)^2 + (z_1-z)^2} \right) - \\ & \left. - (y-y_1) \ln \left( z-z_1 + \sqrt{x_1^2 + (y_1-y)^2 + (z_1-z)^2} \right) \right) \Bigg|_{y=-\Delta y, z=-\Delta z}^{y=\Delta y, z=\Delta z}. \end{aligned} \quad (4)$$

Проведенный анализ показал, что определение компонент вектора магнитного поля  $\vec{B}$  численным дифференцированием потенциала  $\Phi$  методом конечных разностей даёт недостаточно точные результаты, и следует применять аналитически вычисленное выражение. Таким образом, компоненты вектора магнитного поля  $\vec{B}$  определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} B_x = & \frac{\sigma_m}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left( \frac{(x-x_1)(y-y_1)}{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2} + \frac{(x-x_1)(z-z_1)}{(x-x_1)^2 + (z-z_1)^2} - \right. \\ & \left. - \arctan \left( \frac{(y-y_1)(z-z_1)}{x_1 \sqrt{x_1^2 + (y_1-y)^2 + (z_1-z)^2}} \right) \right) \Bigg|_{y=-\Delta y, z=-\Delta z}^{y=\Delta y, z=\Delta z}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$B_y = \frac{\sigma_m}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left( \frac{(y-y_1)}{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2} + \ln(z-z_1 + \sqrt{x_1^2 + (y_1-y)^2 + (z_1-z)^2}) \right) \Bigg|_{y=-\Delta y, z=-\Delta z}^{y=\Delta y, z=\Delta z}$$

$$B_z = \frac{\sigma_m}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left( \frac{(z-z_1)}{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2} + \ln(y-y_1 + \sqrt{x_1^2 + (y_1-y)^2 + (z_1-z)^2}) \right) \Bigg|_{y=-\Delta y, z=-\Delta z}^{y=\Delta y, z=\Delta z}$$

Выражения (4 - 5) дают значения для потенциала и компонент поля прямоугольного элемента ориентированного строго определенным образом и с центром совпадающим с началом координат. Для определения поля от произвольно расположенного и направленного элемента требуется совершить трансляцию и поворот связанных с ним осей координат. В этом случае, потенциал  $\Phi'$  в точке, задаваемой радиус-вектором  $\vec{r}_1$  от элемента, центр которого задаётся радиус-вектором  $\vec{r}_0$ , будет определяться выражением

$$\Phi'(\vec{r}_1) = \Phi(I_{b \rightarrow yz} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_0)), \quad (6)$$

где  $I_{b \rightarrow yz}$  - матрица преобразования координат от глобальной системы координат, в которой производится расчёт к системе координат, связанной с рассматриваемым элементом, в котором он располагается в плоскости y-z.

Вектор магнитного поля  $\vec{B}'$  в этом случае получает вид:

$$\vec{B}'(\vec{r}_1) = I^{-1}_{b \rightarrow yz} \cdot \vec{B}(I_{b \rightarrow yz} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_0)), \quad (7)$$

где  $I^{-1}_{b \rightarrow yz}$  - матрица обратная  $I_{b \rightarrow yz}$  (матрица перехода от связанной системы координат к глобальной системе координат).

Матрицы  $I_{b \rightarrow yz}$  и  $I^{-1}_{b \rightarrow yz}$  определяются путем вычисления парных произведений направляющих векторов осей координат глобальной и локальной систем координат.

Полные потенциал и магнитное поле от периодической структуры определяются суммированием по всем граням всех магнитных элементов:

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r}_1) = & \sum_{i,n} \Phi(I_{i,n b \rightarrow yz} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_{i,n 0}), \Delta y_i, \Delta z_i, \sigma_i), \\ \vec{B}(\vec{r}_1) = & \sum_{i,n} I^{-1}_{i,n b \rightarrow yz} \cdot \vec{B}(I_{i,n b \rightarrow yz} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_{i,n 0}), \Delta y_i, \Delta z_i, \sigma_i), \end{aligned} \quad (8)$$

где индекс  $i$  нумерует элементы периодического массива, а индекс  $n$  - соответствующую грань  $i$ -го элемента.

Элементы аксиально-симметричных магнитных систем как правило представляют из себя цилиндрические сектора с различным направлением намагниченности. Получить полные аналитические выражения полей и потенциалов для таких типов поверхностей, определяемые двойными интегралами от выражения (1), не представляется возможным. Поэтому, при вычислении полей таких систем, используются аналитические выражения для однократных интегралов (1), которые не приводятся в силу их громоздкости. Второй интеграл вычисляется численными методами. Такое однократное аналитическое интегрирование позволяет сильно уменьшить требуемые для вычислений затраты машинного времени и производить численное интегрирование с требуемой контролируемой точностью.

Разработанная программа для определения скалярного потенциала, векторного потенциала и компонент вектора магнитного поля линейных и аксиально-симметричных периодических магнитных структур функционально состоит из двух блоков. Первый блок анализирует составленную структуру, разбивает её на отдельные элементы, а их, в свою очередь - на наборы плоскостей и создаёт массив данных, содержащий перечисление всех значимых плоскостей структуры, координат их центров, размеров, прямых и обратных матриц перехода и величин поверхностного заряда или тока для каждой из них. Второй блок, используя полученный массив данных, определяет значения полей и потенциалов на требуемом множестве точек.

В качестве примера, на рисунках 1 и 2 представлены трехмерные графики компонент магнитного поля системы типа линейного и кругового Хальбаха. Графики нормированы на значение поля  $B_{int} = 1$  Тл.

По сравнению с известными прикладными пакетами, при требовании сопоставимой (1-2% различия) точности от результатов, данная программа гораздо менее требовательна к величине оперативной памяти и имеет сравнимое время вычисления даже для многоэлементных (20-30 магнитов) систем. Время счета снижается с уменьшением количества элементов. Программа не учитывает слабое взаимное влияние полей магнитов и неоднородность их намагниченности.

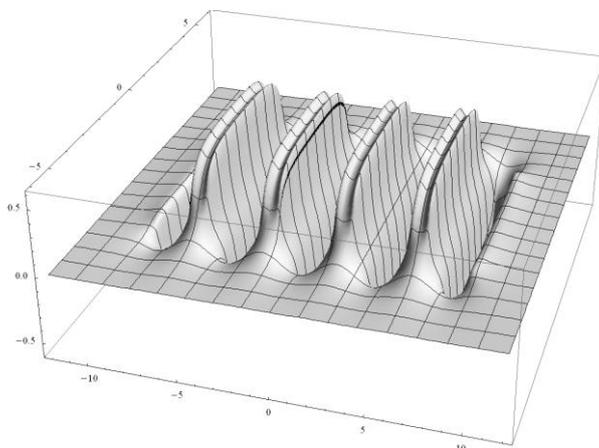


Рис. 1. Трехмерное распределение нормальной компоненты  $B_y$  магнитного поля линейной периодической структуры Хальбаха из 17 элементов на расстоянии 0.025 шага периодичности. Отношение размеров магнитов 6:1:1

Для сравнения приведем некоторые результаты вычисления магнитного поля некоторыми известными программными комплексами. На рис. 3 показано сравнение графиков точного значения (линия 1) модуля магнитного поля цилиндрического периодического массива Хальбаха, и значений модуля магнитного поля, вычисленного в одном из пакетов конечно-элементного анализа магнитных систем при автоматическом выборе параметров расчета (линия 2). На рисунке 4 приведен результат расчета поля периодической системы в виде массива Хальбаха на двумерном графике распределения модуля магнитного поля, на котором видна неперидичность поля по краю магнитной системы. В данном случае неточность связана с недостаточно мелким шагом расчетной сетки в области источников поля.

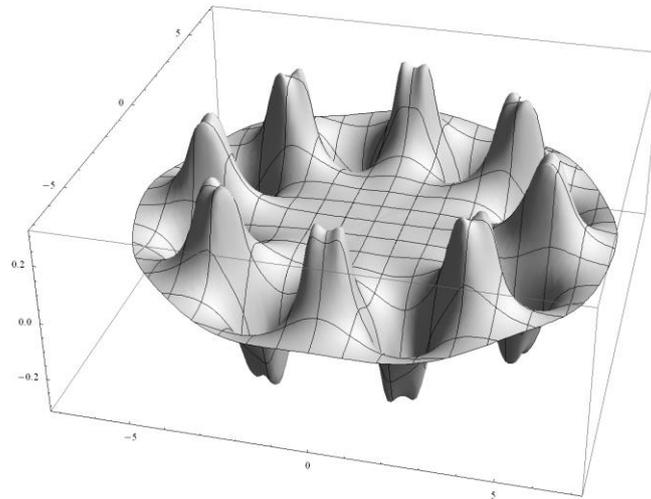


Рис. 2. Трехмерное распределение компоненты  $B_z$  магнитного поля аксиально-периодической структуры Хальбаха из 32 элементов на расстоянии 0.1 характерного размера элемента. Отношение средних размеров магнитов 2:1:1

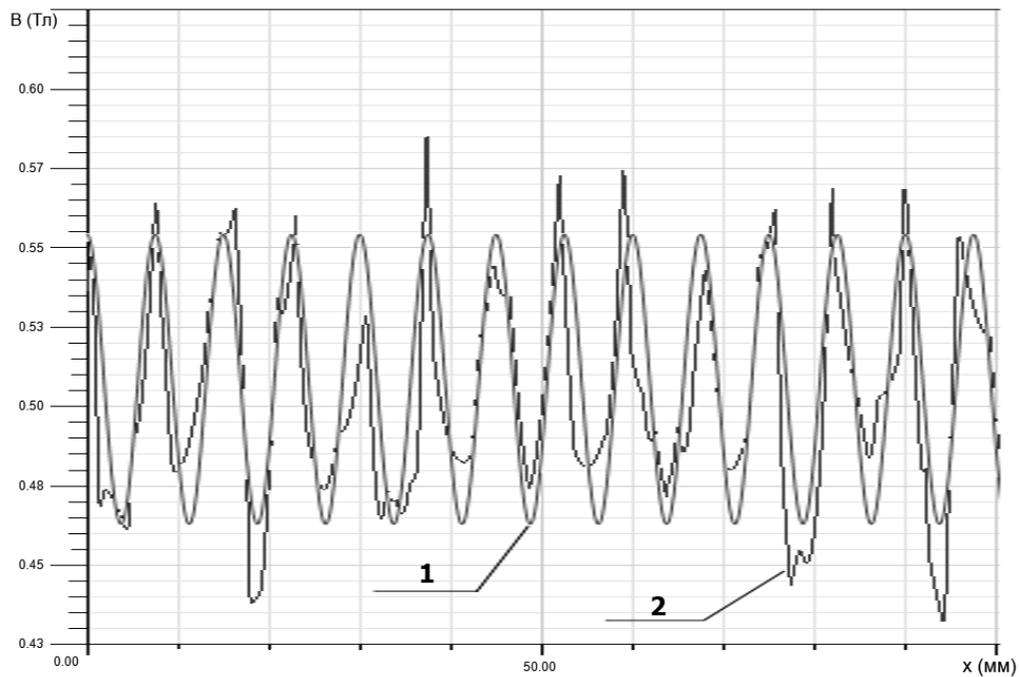


Рис. 3. Пример погрешностей определения модуля магнитного поля от периодической системы в виде массива Хальбаха

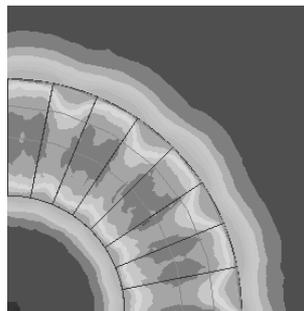


Рис. 4 – Примеры результатов расчета поля аксиального массива Хальбаха в системе "Maxwell"

**Выводы.** Полученные расчетные схемы позволяют определить поля и потенциалы от широкого класса периодических магнитных структур, включающих в себя большинство структур, используемых в системах магнитостатического и магнитодинамического подвеса.

**ЛИТЕРАТУРА**

1. G. Wimmer, T. Steinmetz, M. Clemens, Reuse, Recycle, Reduce (3R) – strategies for the calculation of transient magnetic fields, Applied Numerical Mathematics - J APPL NUMER MATH , vol. 59, no. 3, pp. 830-844, 2009
2. Development and Testing of an Axial Halbach Magnetic Bearing / National Aeronautics and Space Administration John H. Glenn Research Center at Lewis Field: Dennis J. Eichenberg, Christopher A. Gallo, and William K. Thompson – Cleveland, Ohio, July 2006. – p.30. – Report number E-15632.
3. Mark Oxborrow, Ex-house 2D finite-element simulation of the whispering-gallery modes of axisymmetric electromagnetic resonators, arXiv:quant-ph/0607156, 2007
4. Тарасов С.В. Магнитолевитирующий подвес роторов вертикально-осевых ветроэлектрических установок с Н-ротором Дарье на базе массива Хальбаха / С.В. Тарасов, М.Г. Снегирев, И.А. Дорош // Техническая механика. – 2010. – №1. – с. 94-103.
5. G. Wimmer, M. Clemens, J. Lang, Calculation of Magnetic Fields with Finite Elements, Bergische Universität, 2007

ТАРАСОВ Сергей Васильевич, к.т.н., ст. научный сотрудник, зав. отдела №3 Института транспортных систем и технологий НАН Украины «Трансмаг».

Научные интересы:

- математическое моделирование

СНЕГИРЕВ Максим Георгиевич, к.ф.-м.н., ст. научный сотрудник отдела № 3 Института транспортных систем и технологий НАН Украины «Трансмаг».

Научные интересы:

- математическое моделирование

ДОРОШ Игорь Александрович, мл. научный сотрудник отдела № 3 Института транспортных систем и технологий НАН Украины «Трансмаг».

Научные интересы:

- компьютерное моделирование