УДК 534.21

А.П. Коваленко

ВЛИЯНИЕ МАССОВО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМЫ УПРУГИЙ ТРУБОПРОВОД – ЖИДКОСТЬ НА ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ТРУБОПРОВОДЕ ПРИ ПРОДОЛЬНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ УДАРНЫХ НАГРУЗКАХ

Постановка проблемы. Трубопроводные системы широко представлены в различного типа технических устройствах. Зачастую такие системы подвержены различного рода динамическим нагрузкам, в том числе и продольным ударным нагружениям. При определенных ограничениях трубопроводы можно рассматривать как полубесконечные цилиндрические оболочки с жидкостью. Актуальным является исследование переходных процессов в таких системах при продольных ударных нагружениях. При этом необходимо построить механическую и математическую модели; выявить характерные параметры для исследуемой гидроупругой системы; разработать метод решения и исследовать влияние характерных величин на переходные процессы в такой гидроупругой системе.

Анализ публикаций по теме исследования. Активные исследования в этой области проводятся на протяжении последних десятилетий. В работах расматриваются различные модели и методы решения. Рассматриваются ,как правило, приближенные модели оболочек. Одной из распространенных является модель типа Тимошенко. Рассматриваются задачи как в нелинейной так и в линейной постановке. Для исследования переходных процессов зачастую достаточно ограничиться линейной постановкой задачи. Отметим здесь работы [1–5]. Анализ публикаций показывает, что приемлемую точность решения дают приближенные методы решения задачи о переходных процессах в оболочке в линейной постановке [6–8].

Цель статьи. В работе ставится цель построить адекватную математическую модель исследования переходных процессов в полубесконечной цилиндрической оболочке с жидкостью при продольном ударном нагружении используя линейные уравнения движения оболочек по модели Тимошенко; выявление характерных параметров системы и и разработать подход к изучению переходных процессов в данной гидроупругой стистеме при продольном ударном ударном нагружении.

Основная часть

Обоснование выбранной механической модели. Задачи изучения переходных процессов в упругих трубопроводах при продольных ударных нагружениях можно моделировать, с приемлемой погрешностью, полубесконечной цилиндрической оболочкой с находящейся внутри жидкостью. При этом необходимо применять такие механические модели цилиндрической оболочки, которые учитывают волновой характер распространения возмущений по стенке оболочки. Вместе с тем механическая модель движения оболочки должна быть достаточно простой для расчетов, учитывать все существенные процессы для данного класса задач и иметь удовлетворительную точность при проведении вычислений. Модель жидкости также должна учитывать волновой характер распространения возмущений.

Математическая модель. На основании вышеизложенного представляется целесообразным использовать линейные уравнения движения оболочки по модели Тимошенко. Эта модель учитывает волновой характер распространения возмущений по стенке оболочки и, при определенных ограничениях на импульсное или ударное нагружение, обеспечивает хорошее совпадение с результатами исследований по нелинейной теории [9] ($V_0 \le 0,03C_p$, где V_0 – начальная скорость продольного удара по торцу оболочки, C_p – скорость распространения продольных волн по стенке оболочки). Поэтому жидкость рассматриваем в акустическом приближении. Следовательно, задачу можно рассматривать в линейном приближении. При приемлемой точности вычислений такие модели позволяют применять математические методы, значительно упрощающие проведение исследований.

Постановка задачи. На оболочку действует продольная ударная нагрузка, т.е. удар по торцу оболочки некоторой массой M с некоторой начальной скоростью V_0. Рассматриваются тонкостенные оболочки в классическом понимании ($h/R \le 0,1$, h – толщина стенки оболочки; R – срединный радиус оболочки). На торце оболочки находится некоторая масса m.

В данном случае начально-краевая задача запишется следующим образом. Уравнения движения [10]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \beta_{13} \dfrac{\partial W}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \alpha_{22}\psi + \beta_{23} \dfrac{\partial W}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2} - b_3^2 \dfrac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \alpha_{33} W + \beta_{31} \dfrac{\partial U}{\partial x} + \beta_{32} \dfrac{\partial \Psi}{\partial x} + K_s \dfrac{\partial \varphi}{\partial t}, \\ \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r} \cdot \dfrac{\partial \varphi}{\partial r} - \dfrac{1}{a^2} \cdot \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Начальные условия имеют вид

$$t = 0:\ U = W = \Psi = \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0,\ \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \tag{2}$$

Граничные условия будут

$$x = 0:\ \frac{\partial W}{\partial x} = \Psi = 0,\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial t},;$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 2\pi K_m K_h \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \nu W \right) + \frac{2\pi}{\alpha_{33}} K_m K_s K_h \int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial t} r dr,\ t = +0:\ \frac{\partial U}{\partial t} = V_0.$$

$$x = \infty:\ \mathrm{U{=}W} = \Psi = \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \tag{3}$$

$$r = 1:\ \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\partial W}{\partial t}.$$

Задача рассматривается в безразмерном виде. За характерную длину L выбран радиус оболочки, т.е. $L = R$, за характерную массу выбрана величина $M + m$, а за характерное время T выбрана величина $T = R\sqrt{\dfrac{(1-\nu^2)\rho_1}{E}}$, где ν, E, ρ_1 – коэффициент Пуассона, модуль Юнга и плотность материала оболочки соответственно. Здесь x, r, t – продольная, радиальная координаты и время соответственно; U, W, Ψ – продольное, радиальное перемещение стенок оболочки и тангенс угла наклона сечения по теории оболочек типа Тимошенко соответственно. Следует отметить, что при таком выборе характерных величин безразмерная продольная скорость возмущений в оболочке $C_p = 1$ (максимальная), а $C_\nu = \sqrt{k^2(1-\nu)/2}$ – скорость распространения поперечных возмущений по стенке оболочки, a – скорость распространения возмущений (звука) в жидкости.

Коэффициенты системы имеют следующий вид:

$$b_3^2 = \alpha_{33} = \frac{2}{k^2(1-\nu)},\ \beta_{13} = -\nu,\ \alpha_{22} = \beta_{23} = \frac{6k^2(1-\nu)}{K_h^2},\ \beta_{31} = \frac{2\nu}{k^2(1-\nu)},\ \beta_{23} = -1,\ K_h = \frac{h}{R},$$

$K_m = \dfrac{R^3 \rho_1}{M + m}$, $K_s = \dfrac{2R\rho_0}{h\rho_1 k^2(1-\nu)} = \dfrac{2}{k^2(1-\nu)} \cdot \dfrac{K_\rho}{K_h}$, $K_\rho = \dfrac{\rho_0}{\rho_1}$ (ρ_0 – плотность жидкости в состоянии покоя).

Метод исследования. Для изучения данных процессов целесообразно применить разработанный подход [11], который заключается в применении интегрального преобразования Лапласа-Карсона по времени, метода Бубнова–Галеркина, метода простых итераций в пространстве изображений и метода численного обращения преобразования Лапласа-Карсона по смещенным полиномам Лежандра. Такой подход достаточно эффективно зарекомендовал себя при решении ряда задач исследования переходных процессов в полубесконечных цилиндрических оболочках. Погрешность вычислений при этом достигала 1%-2% [6–8].

Запись задачи в пространстве изображений. Для решения поставленной задачи применяется интегральное преобразование Лапласа-Карсона по времени [12] $f^*(p) = p\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$. Тогда в пространстве изображений по Лапласу-Карсону задача запишется в следующем виде :

Система уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2U^*}{dx^2} - d_1^2U^* = \beta_{13}\dfrac{dW^*}{dx}, \\ \dfrac{d^2\psi^*}{dx^2} - d_2^2\psi^* = \beta_{23}\dfrac{dW^*}{dx}, \\ \dfrac{d^2W^*}{dx^2} - d_3^2W^* = \beta_{31}\dfrac{dU^*}{dx} + \beta_{32}\dfrac{d\Psi^*}{dx} + K_s p\varphi^*, \\ \dfrac{\partial^2\varphi^*}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\varphi^*}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{\partial\varphi^*}{\partial r} - \beta^2\varphi^* = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Граничные условия примут вид:

$$x = 0:\ \frac{dW^*}{dx} = \Psi^* = 0,\ \frac{\partial\varphi^*}{\partial x} = pU^*,\ p^2\left(U^* - \frac{V_0}{p}\right) = 2\pi K_m K_h\left(\frac{dU^*}{dx} + \nu W^*\right) + \frac{2\pi}{\alpha_{33}}K_m K_s K_h p\int_0^1 \varphi^* r dr;$$

$$x = \infty:\ U^* = W^* = \Psi^* = 0; \tag{5}$$

$$r = 1:\ \frac{\partial\varphi^*}{\partial r} = pW^*.$$

Звездочкой помечены величины в пространстве изображений. Коэффициенты $\beta,\ d_i^2\ (i = \overline{1,3})$ имеют следующий вид $\beta = p/a,\ d_1^2 = p^2,\ d_2^2 = p^2 + \alpha_{22},\ d_3^2 = b_3^2 p^2 + \alpha_{33}$.

Решение задачи в пространстве изображений. Для данного случая находится потенциал скоростей жидкости в пространстве изображений через перемещения оболочки (для ограниченного класса задач) [13] и задача сводится к решению системы обыкновенных диференциальных уравнений. Для решения поставленной задачи применяется метод Бубнова–Галеркина и метод простых итераций [7]. В начале выбираем начальное приближение решения для $W^* = W_0^* = 0$, которое удовлетворяет граничным усовиям для W^*. Подставляем данное приближение в правую часть второго уравнения системы (4) и находим начальное приближение для $\psi^* = \psi_0^* = 0$. Аналогично подставляем полученные приближения в правую часть первого уравнения системы (4) и находим начальное приближение для $U^* = U_0^* = C_1 e^{-d_1 x}$. Найденные приближения начального приближения для U_0^*, ψ_0^* подставляем в правую часть третьего уравнения системы (4) и находим первое приближение для $W^* = W_1^*$. Далее процесс повторяется по данному алгоритму. В результате в пространстве изображений по Лапласу-Карсону получено начальное, первое и второе приближение для U^*, W^*, Ψ^*. В частности, второе приближение для W^* в пространстве изображений имеет вид

$$W_2^* = (S_{10} + S_{11}x)\cdot e^{-d_1 x} + S_{20}\cdot e^{-d_2 x} + (C_{11} + S_{30}x)\cdot e^{-d_3 x} + (S_{\beta 0} + S_{\beta 1}x)\cdot e^{-\beta x} + \sum_{j=1}^{N} S_{xj0}e^{-\lambda_j x} \tag{6}$$

Здесь p – параметр преобразования Лапласа-Карсона.

Коэффициенты выражения (6) имеют следующий вид:

$$S_{11} = \frac{L_{11}}{d_1 m d_3},\ S_{10} = \frac{L_{10} + 2d_1 S_{11}}{d_1 m d_3},\ S_{20} = \frac{L_{20}}{d_2 m d_3},\ S_{30} = \frac{-L_{30}}{2d_3},\ S_{\beta 1} = \frac{L_{\beta 1}}{\beta m d_3},\ S_{\beta 0} = \frac{L_{\beta 0} + 2\beta S_{\beta 1}}{\beta m d_3},$$

$$S_{xj0} = \frac{pK_s C_{1xj} J_0(\alpha_j)}{\lambda j m d_3},\ L_{10} = \beta_{31}(N_4 - d_1 C_7) - \beta_{32} d_1 N_6 + pK_s\sum_{j=1}^{N} N_{1xj} J_0(\alpha_j),\ L_{11} = -\beta_{31} d_1 N_4,$$

$$L_{20}=-\beta_{32}d_2C_9,\ L_{30}=-\beta_{31}d_3N_3-\beta_{32}d_3N_7+pK_s\sum_{j=1}^{N}N_{3xj}J_0(\alpha_j),$$

$$L_{\beta 0}=-\beta_{31}\beta N_5-\beta_{32}\beta N_8-apK_s(C_7+N_3+N_5)+pK_sC_{1x0}+pK_s\sum_{j=1}^{N}N_{\beta xj}J_0(\alpha_j),$$

$$L_{\beta 1}=pK_sN_{\beta x0},\ N_{1xj}=\frac{pB_{1j}+ad_1^2B_{2j}}{\lambda md_1}N_1,\ N_{3xj}=\frac{pB_{1j}+ad_3^2B_{2j}}{\lambda md_3}C_5,\ N_{\beta xj}=\frac{pB_{1j}+a\beta^2B_{2j}}{\lambda m\beta}N_2,$$

$$C_{1xj}=-(d_1N_{1xj}+d_3N_{3xj}+\beta N_{\beta xj})/\lambda_j,\ N_6=\frac{\beta_{23}d_1}{d_2md_1}N_1,\ N_7=\frac{\beta_{23}d_3}{d_2md_3}C_5,\ N_8=\frac{\beta_{23}\beta}{d_2m\beta}N_2,$$

$$C_9=-N_6-N_7-N_8,$$

$$C_7=\frac{K_1p^2\left(-d_3N_3+N_4-\beta N_5+\nu\left(C_5+N_1+N_2\right)\right)+pV_0+2\pi K_mK_sK_hK_{01}}{p^2+p^2d_1K_1+\pi K_mK_sK_h},$$

$$K_{01}=-a(N_3+N_5)/2+(C_{1x0}+N_{1x0}+N_{3x0})/2+\frac{a(\beta-1+e^{-\beta})}{\beta^2}\left(C_5+N_1+N_2\right),$$

$$K_1=2\pi K_mK_h/p^2,\ C_{1x0}=-(d_1N_{1x0}+d_3N_{3x0}-\beta N_{\beta x0})/\beta,$$

$$N_{1x0}=\frac{pB_{10}+ad_1^2B_{20}}{\beta md_1}N_1,\ N_{3x0}=\frac{pB_{10}+ad_3^2B_{20}}{\beta md_3}C_5,\ N_{\beta x0}=\frac{pB_{10}+a\beta^2B_{20}}{2\beta}N_2,$$

$$N_3=\frac{\beta_{13}d_3C_5}{d_1md_3},\ N_4=\frac{\beta_{13}N_1}{2},\ N_5=\frac{\beta_{13}\beta N_2}{d_1m\beta},\ C_5=-(d_1N_1+\beta N_2)/d_3,$$

$$N_1=\frac{\beta_{31}d_1C_1}{d_3md_1},\ N_2=\frac{apK_sC_1}{d_3m\beta},\ C_1=\frac{pV_0}{p^2+p^2d_1K_1+a\pi K_mK_sK_h},\ d_imd_j=d_i^2-d_j^2,$$

$$\beta md_j=-d_jm\beta=\beta^2-d_j^2,\ \lambda imd_j=-d_jm\lambda i=\lambda_i^2-d_j^2,\ \lambda_i^2=\alpha_i^2+\beta^2,$$

$$B_{ij}=\frac{2}{J_0^2(\alpha_j)}\int_0^1 r^{i-1}J_0(\alpha_jr)dr.$$

Здесь $J_0(x), J_1(x)$ – функции Бесселя нулевого и первого порядка соответственно; α_j – корни уравнения $J_1(x)=0$.

Анализ полученных результатов. При записи задачи в безразмерных величинах были выделены безразмерные коэффициенты $K_h=\dfrac{h}{R}$, $K_m=\dfrac{R^3\rho_1}{M+m}$, $K_s=\dfrac{2}{k^2(1-\nu)}\cdot\dfrac{K_\rho}{K_h}$, $K_\rho=\dfrac{\rho_0}{\rho_1}$ (ρ_0 – плотность жидкости). Это есть характерные параметры рассматриваемой гидроупругой системы и позволяют оценить взаимное влияние параметров системы на динамические процессы при продольном ударном нагружении. В частности, коэффициент K_s позволяет учесть взаимное влияние жидкости и оболочки при рассматриваемых динамических процессах. Этот коэффициент имеет ясный физический смысл и зависит от констант для материала оболочки, отношения плотностей для жидкости и материала оболочки, а также от удельной толщины стенки оболочки.

Анализ решения (6) в пространстве изображений позволяет сделать следующие выводы: слагаемые с множителями e^{-d_1x} и e^{-d_2x} соответствуют возмущениям, распространяющимся с самой высокой скоростью, равной единице (в безразмерном виде); слагаемые с множителями e^{-d_3x} соответствуют возмущениям, распространяющимся со скоростью распространения поперечных возмущений (в безразмерном виде это равно примерно 0,5), слагаемые с множителями $e^{-\beta x}$ соответствуют возмущениям, распространяющимся со скоростью распространения волны давления в жидкости (в безразмерном виде это равно примерно 0,25), слагаемые с множителями $e^{-\lambda_jx}$ соответствуют возмущениям от взаимодействия стенки оболочки и жидкости (соответствуют слагаемым от применения метода Бубнова–Галеркина). Следовадельно, решение учитывает распространение возмущений со всеми скоростями, которые присущи системе (1). Переход в пространство оригиналов предполагается осуществлять численно [7, 8, 14].

Выводы и перспективы дальнейших исследований. На основании вышеизложенного следует, что применение предложенного подхода дает возможность построить приближенное решение в пространстве изображений, учитывающее взаимное влияние элементов гидроупругой системы и волновой характер распространения возмущений. Метод итераций имеет хорошую сходимость. Переход в пространство оригиналов осуществляется численно с приемлемой погрешностью вычислений. Исследования в данной области целесообразно продолжать для исследования переходных процессов в данных механических системах при осевом ударном нагружении для различных параметров системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алумяэ Н.А. Переходные процессы деформации упругих оболочек и пластинок. / Н.А.Алумяэ // Труды VI Всес.конф. по теории оболочек и пластинок. – М.: Наука, 1966. – С.883–889.
2. Мовсисян Л.А. Продольный удар по цилиндрической оболочке /Л.А.Мовсисян//Изв. АН Арм.ССР.Физ мат науки.– 1964. – Т.17. – №5. – С. 43–46.
3. Нигул У.К. О применимости приближенных теорий при переходных процессах деформации круговых цилиндрических оболочек/ У.К.Нигул //Тр. VI Всес.конф. по теории оболочек и пластинок.– М.: Наука,1966. – С.593–599.
4. Сагомонян А.Я. Осевой удар цилиндрической оболочки о жесткую плоскость/ А.Я.Сагомонян // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1973. – №2. – С.173–176.
5. Кубенко В.Д. Нестационарное взаимодействие элементов конструкций со средой / В.Д. Кубенко. – Киев.: Наук. думка, 1979. –184с.
6. Коваленко А.П. Исследование практической сходимости метода итераций при математическом моделировании динамических процессов в цилиндрической оболочке /А.П.Коваленко // Вестник Херсонского национального технического университета. – 2008. – Вып. 2(31). – С.240–244.
7. Коваленко А.П. Исследование практической сходимости численного обращения преобразования Лапласа-Карсона при математическом моделировании динамических процессов в цилиндрической оболочке / А.П.Коваленко // Вестник Херсонского национального технического университета. – 2009. –Вып. 2(35). – С.236-240.
8. Коваленко А.П. О применимости интегрального преобразования Лапласа-Карсона при математическом моделировании переходных процессов в цилиндрических оболочках. / А.П.Коваленко // Вестник Херсонского национального технического университета. – 2010. – Вып. 3(39). – С.213-217.
9. Сагомонян Е.А. О распространении продольных волн в цилиндрической оболочке / Е.А.Сагомонян // Вестн. Моск.ун-та. Математика, механика. – 1977. – №1. – С.111-112.
10. Gerrmann G., Mirsky J. Three–dimensional and shell-theory analysis of axially motions of cylinder/ G. Gerrmann, J.Mirsky //J. Appl. Mech.–1956.– T.23. – №4.–P.563-568.
11. Коваленко А.П. Переходные процессы в упругих трубопроводах с жидкостью при продольных импульсных нагружениях. КОНСОНАНС – 2011. Акустичний симпозіум (27.09.29.09.2011), Зб. праць.: – К.: – 2011. – С. 148-153.
12. Лурье А.И. Операционное исчисление / А.И.Лурье М.-Л.:Гостехиздат, 1950. – 431с.
13. Коваленко А.П. Математическое моделирование продольных динамических возмущений в оболочке в системе полубесконечная цилиндрическая оболочка с жикостью при осевом импульсном нагружении. КОНСОНАНС-2007, Акуст. симпозіум (25-27 вересня 2007 р.), Зб. праць.– К.: – 2008. – С.108-113.
14. Крылов В.И. Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа. В.И.Крылов, Н.С.Скобля. – М.: Наука, 1974.– 224с.

КОВАЛЕНКО Анатолий Петрович – к.ф.-м.н., ст.н.с., старший научный сотрудник Института механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины.

Научные интересы:

- динамические волновые процессы в упругих и гидроупругих системах.