

ПРИМЕРЫ АДЕКВАТНОЙ СТАТИЧЕСКОЙ КОНДЕНСАЦИИ НА ТРЕУГОЛЬНОМ ЭЛЕМЕНТЕ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Введение. Проблема физического неправдоподобия спектров поузловых распределений равномерной массовой силы возникла с появлением конечных элементов высших порядков. Такие элементы использовали Вёбеке (1965), Аргирис (1965), Фелиппа (1966), Зенкевич и Ченг (1967) и другие. На треугольных элементах неадекватные спектры узловых нагрузок, как правило, ассоциируются с внутренними узлами. Процедура исключения внутренних узлов (статическая конденсация) не всегда эффективна с точки зрения установления физического правдоподобия спектра узловых нагрузок. До сих пор конденсация использовалась исключительно для уменьшения размерности системы конечно-элементных уравнений. Возникает вопрос: существует ли "рецепт" конденсации, уменьшающий размерность системы и при этом обеспечивающий физическую адекватность спектра узловых нагрузок? В работе найдем такой "рецепт" для треугольника 4-го порядка. Аналогичный результат для треугольника 3-го порядка будет опубликован в ближайшее время.

Анализ предшествующих публикаций. На треугольном элементе 3-го порядка статическую конденсацию впервые предложили Сьярле и Равьяр (1972) [1]. Они исключили внутренний узел, однако устранить отрицательные узловые нагрузки им не удалось. Сегодня мы понимаем почему. Во-первых, эта задача имеет множество решений, среди которых не все физически адекватны. Во-вторых, за 4 года до этого Эргатудис, Айронс и Зенкевич пришли к выводу, что на элементах высших порядков "негативизм" в спектре узловых нагрузок неустраним ("парадокс Зенкевича") [2]. В начале 80-х годов прошлого века были найдены контрпримеры [3], опровергающие вывод Зенкевича и его коллег. Но к моменту выхода статьи Сьярле и Равьяра Зенкевич уже входил в первую тройку специалистов, успешно развивающих и применяющих метод конечных элементов. Авторитетное мнение Зенкевича фактически приостановило поиски альтернативных моделей, свободных от негативизма в спектре узловых нагрузок.

Ситуация очень напоминает парадокс Бертрана (1889) в теории вероятностей [4], который сильно пошатнул доверие не только к геометрической вероятности, но и к теории вероятностей в целом. Первая догадка, объясняющая парадокс Бертрана появилась только через 20 лет (Борель, 1909). А еще через три года Пуанкаре дал математическое объяснение парадокса Бертрана, что способствовало постепенному восстановлению авторитета теории вероятностей как математической науки.

Цель статьи. На примере треугольного элемента 4-го порядка [5] показать варианты статической конденсации, обеспечивающие физическую адекватность спектра узловых нагрузок.

Основная часть. Одна из особенностей конечных элементов заключается в том, что чем выше порядок элемента, тем труднее физически интерпретировать его интегральные характеристики [2]. На рис. 1 показан треугольный элемент 4-го порядка. Элемент содержит 15 узлов, поскольку полный полином 4-го порядка (двух аргументов) содержит 15 мономов:

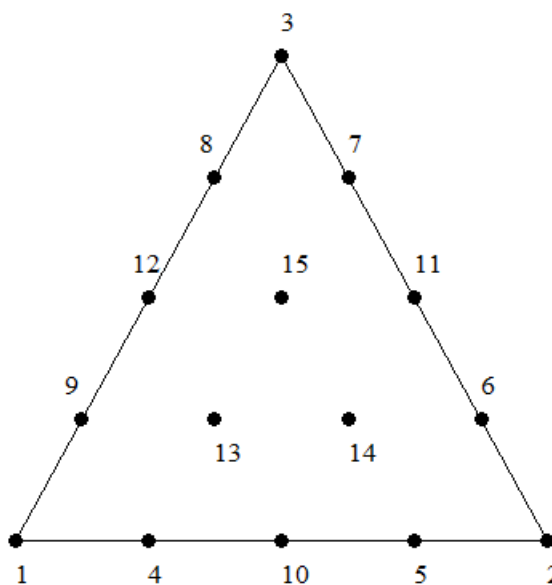


Рис. 1. Треугольник 4-го порядка

$$f(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^4 + \alpha_{12} x^3 y + \alpha_{13} x^2 y^2 + \alpha_{14} xy^3 + \alpha_{15} y^4. \quad (1)$$

Базисные функции треугольных элементов обычно [5, 6] выражают через барицентрические координаты симплекса: Δ_{123} . В этом важное преимущество барицентрических координат $L_1(x, y)$, $L_2(x, y)$, $L_3(x, y)$. В технической литературе эти координаты называют треугольными.

Чтобы составить полное представление о базисе треугольника 4-го порядка, достаточно выписать четыре типичные функции. Например, для узла 1 с координатами $(1; 0; 0)$:

$$N_1(x, y) = \frac{1}{3} L_1(4L_1 - 1)(2L_1 - 1)(4L_1 - 3),$$

для узла 4 с координатами $\left(\frac{3}{4}; \frac{1}{4}; 0\right)$:

$$N_4(x, y) = \frac{16}{3} L_1 L_2 (4L_1 - 1)(2L_1 - 1),$$

для узла 10 с координатами $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$:

$$N_{10}(x, y) = 4L_1 L_2 (4L_1 - 1)(4L_2 - 1),$$

для внутреннего узла 13 с координатами $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)$:

$$N_{13}(x, y) = 32L_1 L_2 L_3 (4L_1 - 1).$$

Из $N_1(x, y)$ легко получить N_2 и N_3 , из $N_4 - N_5, \dots, N_9$; из $N_{10} - N_{11}$ и N_{12} , из $N_{13} - N_{14}$ и N_{15} .

Чтобы найти физически адекватное распределение нагрузок на граничные узлы необходимо проанализировать исходное распределение по всем узлам (включая внутренние). Узловая доля δ_i нагрузки в узле i определяется интегральным усреднением соответствующей функции $N_i(x, y)$:

$$\delta_i = \frac{1}{S(D)} \iint_D N_i(x, y) dx dy, \quad i = \overline{1, 15}, \quad (2)$$

где D – область интегрирования, $S(D)$ – площадь области D . Определяя δ_i , удобно использовать формулы (Холланда – Белла) вычисления двойного интеграла в барицентрических координатах [7]. Результаты вычислений дают следующий спектр:

$$\delta_i = 0 \text{ для } i = 1, 2, 3; \quad \delta_i = \frac{4}{45} \text{ для } i = 4, \dots, 9; \quad \delta_i = -\frac{1}{45} \text{ для } i = 10, 11, 12;$$

$$\delta_i = \frac{8}{45} \text{ для } i = 13, 14, 15.$$

Парадокс в том, что безупречные математические вычисления в духе Ньютона – Котеса приводят к физически неадекватному спектру узловых нагрузок. Исключение внутренних узлов сводится к правильному распределению "внутренней" нагрузки $\frac{24}{45}$ по граничным узлам. Понятно, что эта задача

решается неоднозначно. Важный вывод: единственная модель элемента лагранжева семейства генерирует множество моделей серендипова семейства того же порядка. Один из вариантов физически адекватной конденсации (применительно к узлу 13) таков: освобождаясь от нагрузки, узел 13 передает $\frac{2}{45}$ узлу 1, а узлам 10 и 12 – по $\frac{3}{45}$. Новый базис теперь выглядит так:

$$\bar{N}_1 = N_1 + \frac{1}{4} N_{13}; \quad \bar{N}_2 = N_2 + \frac{1}{4} N_{14}; \quad \bar{N}_3 = N_3 + \frac{1}{4} N_{15};$$

$$\bar{N}_{10} = N_{10} + \frac{3}{8} N_{13} + \frac{3}{8} N_{14}; \quad \bar{N}_{11} = N_{11} + \frac{3}{8} N_{14} + \frac{3}{8} N_{15}; \quad \bar{N}_{12} = N_{12} + \frac{3}{8} N_{13} + \frac{3}{8} N_{15}.$$

Базисные функции, отвечающие узлам $i = 4, \dots, 9$, остаются без изменения.

Обозначим через γ_i узловые доли нагрузки серендиповой модели. Новый спектр узловых нагрузок теперь имеет вид:

$$\gamma_i = \frac{2}{45}, i = 1, 2, 3; \gamma_i = \frac{4}{45}, i = 4, \dots, 9; \gamma_i = \frac{5}{45}, i = 10, 11, 12.$$

Приведем интерполяционные кубатуры:

для лагранжевой модели

$$\iint_D f(x, y) dS = mesD \left(0 \cdot \sum_{i=1}^3 f_i + \frac{4}{45} \sum_{i=4}^9 f_i - \frac{1}{45} \sum_{i=10}^{12} f_i + \frac{8}{45} \sum_{i=13}^{15} f_i \right)$$

для серендиповой модели

$$\iint_D f(x, y) dS = mesD \left(\frac{2}{45} \sum_{i=1}^3 f_i + \frac{4}{45} \sum_{i=4}^9 f_i + \frac{5}{45} \sum_{i=10}^{12} f_i \right) \quad (3)$$

Наличие серендиповой модели дает возможность сформулировать краевую задачу на треугольнике с дискретными условиями Дирихле на границе. Пусть в граничных узлах $\overline{T_i}$ ($i = 1, 12$). Тогда температуру в любой точке пластины можно определить путем взвешенного усреднения граничных температур:

$$T(x, y) = \sum_{i=1}^{12} \overline{N}_i(x, y) \cdot T_i, \quad (4)$$

где $\{\overline{N}_i(x, y)\}$ – базис серендиповой модели.

Как обычно, базисные функции обладают свойствами:

$$\overline{N}_i(x_k, y_k) = \begin{cases} 1, & \text{если } i = k, \\ 0, & \text{если } i \neq k; \end{cases} \sum_{i=1}^{12} \overline{N}_i(x, y) = 1, \quad (5)$$

где i – номер функции, k – номер узла.

Кроме того, теперь можно обобщить известную барицентрическую задачу Мёбиуса на треугольник с 12-ю узлами на контуре. Заметим, что при таком количестве узлов не исключен парадоксальный результат, когда некоторые узлы на границе испытывают "гравитационное отталкивание" [8].

Другой вариант физически адекватной конденсации состоит в следующем (применительно к 13-му узлу): узел 13 передает $\frac{1}{45}$ своей нагрузки узлу 1, а узлам 10 и 12 – по $\frac{7}{90}$. В этом случае серендипов и лагранжев базисы связаны следующими соотношениями:

$$\overline{N}_1 = N_1 + \frac{1}{8} N_{13}; \quad \overline{N}_2 = N_2 + \frac{1}{8} N_{14}; \quad \overline{N}_3 = N_3 + \frac{1}{8} N_{15};$$

$$\overline{N}_{10} = N_{10} + \frac{7}{16} (N_{13} + N_{14}); \quad \overline{N}_{11} = N_{11} + \frac{7}{16} (N_{14} + N_{15}); \quad \overline{N}_{12} = N_{12} + \frac{7}{16} (N_{13} + N_{15});$$

$$\overline{N}_i = N_i, i = 4, \dots, 9.$$

Соответствующий спектр узловых нагрузок имеет вид:

$$\gamma_i = \frac{1}{45}, i = 1, 2, 3; \gamma_i = \frac{4}{45}, i = 4, \dots, 9; \gamma_i = \frac{6}{45}, i = 10, 11, 12.$$

Таким образом, мы получим альтернативный набор весовых коэффициентов для интерполяционной кубатуры (3), а также новые функции для взвешенного усреднения граничных потенциалов (4). Понятно, что барицентрическая задача Мёбиуса также получит новое решение. При этом свойства базисных функций (5) сохраняются, как и следовало ожидать.

Интересно сопоставить построенные модели в рамках конкретной задачи. Например, в задаче Дирихле можно эмпирически определить температуру в контрольной точке треугольной пластины. Для этого треугольник покрывают сеткой с треугольными ячейками и моделируют случайные блуждания броуновских частиц с поглощениями в граничных узлах. Вместо формулы (4) используется формула монте-карловского усреднения:

$$T(x_j, y_j) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{12} n_i \cdot T_i,$$

где x_j, y_j – контрольный узел внутри треугольника – точка старта всех частиц; n – общее число частиц, стартующих из контрольного узла; n_i – число частиц, поглощенных узлом i .

Сопоставление эмпирического и теоретического подходов – тема отдельной статьи. Здесь стоит заметить, что эмпирическая температура, как правило, незначительно отличается от теоретической. При этом весовые коэффициенты в формулах усреднения могут отличаться не только по величине, но и по знаку. В этом проявляется удивительное и весьма полезное свойство процедуры усреднения – устойчивость.

Выводы и перспективы дальнейших исследований. В работе конструктивно доказано существование треугольных элементов 4-го порядка, свободных от "негативизма" в поузловом распределении равномерной массовой силы. Представляет интерес изучение возможности распространения полученных результатов на пространственные элементы в форме тетраэдра.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Митчелл Э. Метод конечных элементов для уравнений с частными производными / Э. Митчелл, Р. Уайт. – М.: Мир, 1981. – 216 с.
2. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. – М.: Мир, 1975. – 541 с.
3. Хомченко А. Н. Некоторые вероятностные аспекты МКЭ / А. Н. Хомченко. – Ивано-Франковск, 1982. – 9 с. – Деп. в ВИНТИ 18.03.82, №1213
4. Секей Г. Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике / Г. Секей. – М.: Мир, 1990. – 240 с.
5. Хомченко А. Н. Геометричне моделювання на дискретних елементах / А. Н. Хомченко, Г. Я. Тулученко. – Херсон: ОЛДІ-плюс, 2007. – 270 с.
6. Сегерлинд Л. Дж. Применение метода конечных элементов / Л. Дж. Сегерлинд. – М.: Мир, 1979. – 392 с.
7. Норри Д. Введение в метод конечных элементов / Д. Норри, Ж. де Фриз. – М.: Мир, 1981. – 304с.
8. Хомченко А. Н. О некоторых обобщениях барицентрической задачи Мёбиуса / А. Н. Хомченко, Е. И. Литвиненко // Вісник Запорізького нац. ун-ту. Фізико-математичні науки. №1, 2010. – С. 119-122.

КОВАЛЮК Дария Вадимовна – магистр систем и методов принятия решений, соискатель кафедры прикладной и высшей математики Черноморского государственного университета им. Петра Могилы.

Научные интересы:

- информационные технологии в сфере конечно-элементных расчетов.

ХОМЧЕНКО Анатолий Никифорович – д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой прикладной и высшей математики Черноморского государственного университета им. Петра Могилы.

Научные интересы:

- нестандартные модели серендиповых аппроксимаций на конечных элементах.