УДК 519.6

В.І.Кузьмич, Ю.В.Кузьмич

ПРО ІСНУВАННЯ ТЕТРАЕДРА ІЗ ЗАДАНИМИ ДОВЖИНАМИ РЕБЕР

Постановка проблеми. Загальновідома умова побудова трикутника з трьох відрізків: якщо довжина кожного з трьох відрізків менша за суму довжин двох інших (нерівність трикутника), то з цих відрізків можна побудувати трикутник, інакше, довжина кожної сторони трикутника менша за суму довжин двох інших сторін трикутника.

Іншим аналогом такої умови може слугувати умова існування відмінної від нуля площі трикутника, що обчислена за довжинами трьох його сторін. Цю площу можна обчислити за відомою формулою Герона:

$$s = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)} \quad ,$$

де *a*, *b*, *c* - довжини сторін трикутника. З цієї формули видно, що для існування відмінної від нуля площі трикутника необхідно і достатньо, щоб кожна з його сторін була менша за суму двох інших.

У той час як для плоских фігур існують умови та правила їх побудови за допомогою простих засобів (лінійка, циркуль і таке інше), для просторових фігур, у зв’язку з важкістю просторової побудови, таких правил не встановлюють, тому в подальшому під можливістю побудови просторової фігури будемо розуміти можливість її існування при заданих параметрах.

Аналіз публікацій за темою дослідження. Однією з найпростіших просторових фігур є трикутна піраміда (тетраедр). За Евклідом піраміда (зокрема тетраедр) це тілесна фігура, що лежить між площинами і поставлена від однієї площини до однієї точки. Ще з часів Платона багатогранники розглядались як порожнинні (нічим незаповнені) просторові фігури, що складаються лише з ребер. Аристотель розрізняв порожнинні багатогранники і заповнені. Причому, ці багатогранники він розглядав як різні предмети. Евклід розглядав многогранники як заповнені, хоча і не вказував на те, чим вони заповнені, оскільки античні математики не використовували формального поняття простору [1, с. 164].

Для тетраедра умови його побудови за довжинами усіх його ребер авторам невідомі. В якості однієї з таких умов, на нашу думку, могла б слугувати умова існування відмінного від нуля об’єму тетраедра, ребрами якого є шість заданих відрізків. Таку формулу об’єму тетраедра отримав німецький математик Іоахім Юнгіус (Joachim Jungius, 1587-1657), і тому встановлена ним відповідна формула носить назву формули Юнгіуса [2, с. 100]. Однак, при побудові тетраедра із заданих відрізків, як показують конкретні приклади, порушується однозначність при обчисленні його об’єму і навіть може бути поставлене під сумнів саме існування такого тетраедра. Безпосереднє обчислення об’єму тетраедра при різних можливих варіантах вибору його ребер наштовхується на велику кількість обчислень (720 різних перестановок відрізків) за досить складною формулою Юнгіуса.

Мета статті. У даній статті описано роботу розробленого авторами калькулятора, що призначений для циклічного обчислення об’єму тетраедра за відомими довжинами його ребер при різноманітних їх перестановках. Результати роботи калькулятора дають відповіді на питання про існування тетраедра із заданими ребрами, та про його об’єм.

Основна частина. Нехай задано тетраедр *SABC* (мал. 1), довжини ребер якого позначимо:

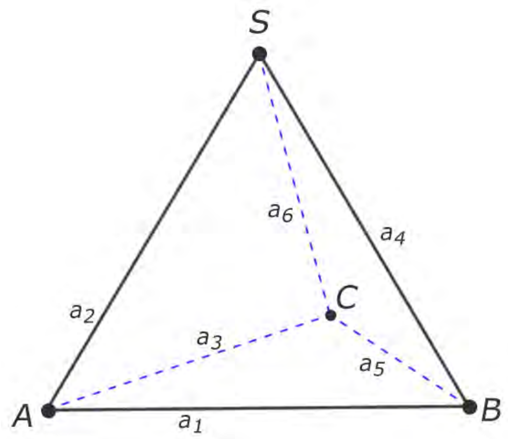
$$AB = a_1, AS = a_2, AC = a_3, BS = a_4, BC = a_5, \mathrm{CS} = a_6;$$

об’єм тетраедра *SABC* позначимо через v.

При таких позначеннях формула Юнгіуса матиме вигляд:

$$v^2 = \frac{1}{144}\Big(a_1^2a_6^2(a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2-a_1^2-a_6^2)+a_2^2a_5^2(a_1^2+a_3^2+a_4^2+a_6^2-a_2^2-a_5^2)+$$

$$+a_3^2a_4^2(a_1^2+a_3^2+a_5^2+a_6^2-a_3^2-a_4^2)-a_2^2a_3^2a_6^2-a_1^2a_3^2a_5^2-a_1^2a_2^2a_4^2-a_4^2a_5^2a_6^2\Big).$$



Мал. 1. Тетраедр.

Звичайні обчислення з конкретними числовими даними показують, що для одних і тих же шести відрізків, при певних їх перестановках, об’єм тетраедра побудованого з цих відрізків існує, а при інших перестановках може не існувати. Причому, для окремих трійок цих відрізків може не виконуватись нерівність трикутника (тобто побудувати з них трикутник неможливо), однак тетраедр може мати у цьому випадку об’єм. Наприклад, при

$a_1 = a_3 = a_5 = 1$ і $a_2 = a_4 = a_6 = 3$, за формулою Юнгіуса матимемо:

$v = \dfrac{\sqrt{26}}{12}$. У той же час, $a_2 = 3 > a_1 + a_3 = 2$.

З іншого боку, виконання нерівності трикутника для будь-якої трійки з шести даних відрізків не завжди забезпечує існування об’єму тетраедра побудованого з цих відрізків. Наприклад, при $a_1 = a_3 = a_5 = 1$, $a_2 = a_4 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ і $a_6 = \dfrac{1}{2}$ вираз у правій частині рівності Юнгіуса буде від’ємним: $v^2 = -\dfrac{13}{144^2}$. У той же час, нерівність трикутника виконується для будь-яких трьох відрізків із шести заданих, оскільки вона виконується для найбільшого за довжиною відрізка a_3, і двох найменших за довжиною відрізків a_2 і a_6. Дійсно, знаходимо:

$a_2 + a_6 = \dfrac{\sqrt{3}}{3} + \dfrac{1}{2} \approx 1{,}07$. З іншого боку, $a_3 = 1$. Отже, $a_2 + a_6 > a_3$.

Крім того, при одному і тому ж наборі відрізків з них можна побудувати тетраедри різного об’єму. Наприклад, при $a_1 = a_3 = a_5 = 2$ і $a_2 = a_4 = a_6 = 3$ матимемо: $v = \dfrac{\sqrt{23}}{3}$. Якщо ж навпаки: $a_1 = a_3 = a_5 = 3$ і $a_2 = a_4 = a_6 = 2$, то $v = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.

З наведених прикладів можна зробити висновок, що при заданих довжинах ребер тетраедра його об’єм буде залежати від орієнтації тетраедра.

Для перевірки можливості побудови тетраедра за шістьма заданими відрізками, як за усіма його ребрами, можна використати формулу Юнгіуса. Для цього потрібно занумерувати відрізки відповідно до зроблених у цій роботі позначень і обчислити праву частину формули Юнгіуса. Якщо права частина формули не додатна, то тетраедр з таким чином занумерованих відрізків побудувати неможливо, якщо ж вона додатна, то тетраедр побудувати можливо. Трудність застосування цього прийому полягає у великій кількості варіантів нумерації відрізків, це кількість перестановок шести елементів — 720. Тому для випадку конкретних числових значень довжин відрізків у пригоді може стати розроблений авторами калькулятор, запрограмований на циклічне обчислення правої частини формули Юнгіуса.

Ознайомитись з роботою цього калькулятора, або використати його для обчислень, можна за адресою: http://ksuonline.ksu.ks.ua/mod/resource/view.php?id=2645

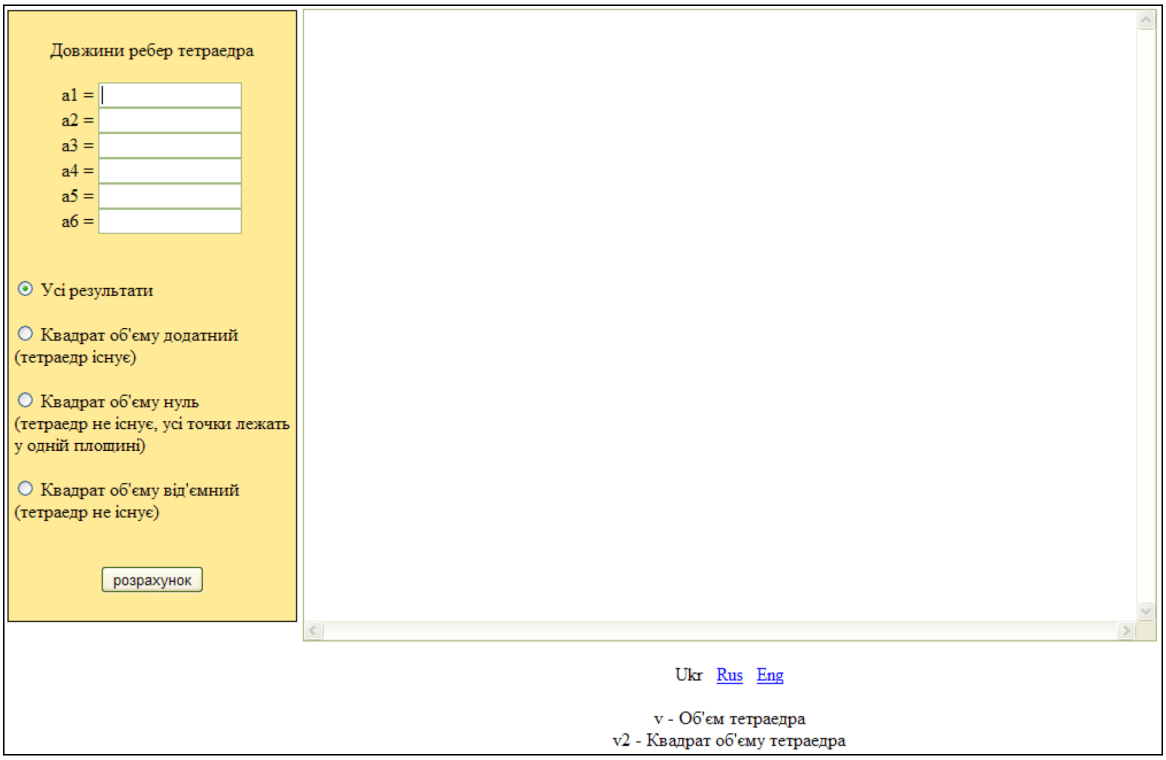
Зрозуміло, що у більшості випадків калькулятор дає наближені значення правої частини формули Юнгіуса, тому у випадку, коли отримано значення достатньо близьке до нуля (додатне чи від'ємне), потрібно окремо дослідити даний випадок, підвищивши при цьому точність обчислень.

На малюнку 2 представлено робоче поле калькулятора, за допомогою якого розраховується об'єм тетраедра при усіх можливих перестановках його ребер. На калькуляторі можливо отримати як усі можливі 720 результатів обчислення правої частини формули Юнгіуса, так і відфільтрувати лише додатні, нульові або від'ємні її значення.

Для обчислення правої частини формули Юнгіуса достатньо ввести на лівій частині робочого поля калькулятора у відповідні поля значення довжин ребер тетраедра: $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$, потім вибрати потрібний набір значень квадрату об'єму (усі значення, додатні, нульові або від'ємні) і активізувати кнопку «розрахунок» (мал. 2). При цьому у правій частині робочого поля по закінченні обчислень з'явиться повідомлення «Розрахунок завершено» і будуть наведені усі отримані результати обчислень, із вказівкою про неможливість існування тетраедра у випадку нульового або від'ємного значень квадрата об'єму, а також із вказівкою кількості усіх результатів. Квадрат об'єму тетраедра позначено через v_2, а сам об'єм через v.

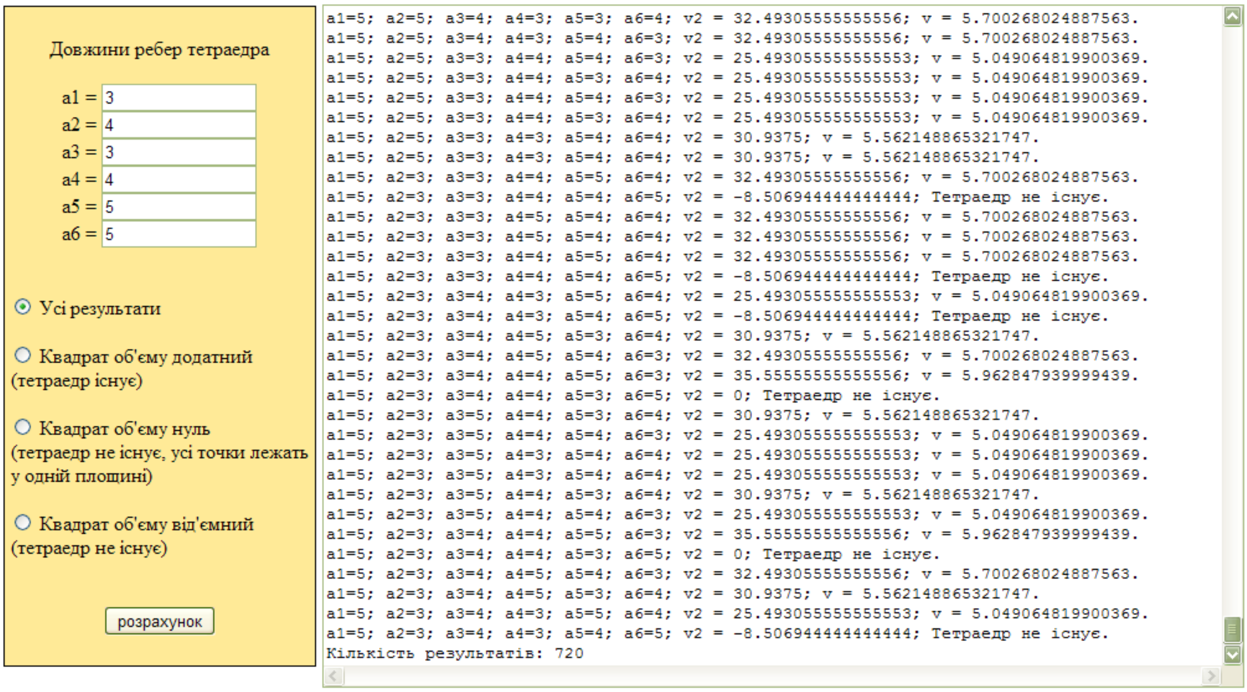
У випадку нульового значення об'єму тетраедра можна зробити висновок про те що усі чотири точки належать одній площині, тобто калькулятор можна використати і для вивчення взаємного положення точок у просторі.

У калькуляторі передбачено повідомлення системи про некоректність вводу даних: «Введіть значення a_n» – у випадку незаповненого поля «a_n», та «Значення a_n некоректне (s). Для дробових чисел використовуйте крапку» – у випадку заповнення поля «an» не цифровим значенням «s», або при використанні коми у запису дробового числа.



Мал. 2. Робоче поле калькулятора.

Як видно з малюнка 3, при певному виборі ребер можливі додатні, від'ємні, а також нульові значення квадрату об'єму тетраедра.



Мал. 3. Результати обчислень.

Робота калькулятора при конкретних числових значеннях довжин ребер тетраедра вказує на те, що для стереометричних задач пов'язаних з тетраедром важливе значення має його орієнтація у просторі, від цього може залежати значення окремих елементів та характеристик тетраедра.

Висновки та перспективи подальших досліджень. На відміну від рівновеликих многокутників, які є рівно складеними (будь який із двох рівновеликих многокутників можна розрізати на скінчену кількість частин, із яких можна скласти другий многокутник), рівновеликі многогранники не завжди є рівно складеними. У 1901 році це довів M. Dehn [3, с. 6]. Таким чином, він дав відповідь на третю проблему Гільберта [4, с. 28]. Тому у подальшому дану роботу можна використати для створення подібних калькуляторів для інших многогранників, які складаються із скінченого числа тетраедрів.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Начала Евклида. Книги XI-XV. – М.-Л.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1950. – 331с.
2. Понарин Я.П. Элементарная геометрия: В 2 т. – Т. 2: Стереометрия, преобразования пространства / Я.П. Понарин. – Москва: МЦНМО, 2006. – 256 с.
3. Каган В.Ф. О преобразовании многогранников/ Каган В.Ф.. – Одесса: Матезис, 1913. – 27 с.
4. Проблемы Гильберта./ Сборник под общей ред. П.С. Александрова. – Москва: Наука, 1969. – 239с.

КУЗЬМИЧ Валерій Іванович, кандидат фізико-математичних наук, доцент, декан факультету фізики, математики та інформатики, завідувач кафедри алгебри, геометрії та математичного аналізу Херсонського державного університету.

Наукові інтереси:

- підсумовування розбіжних рядів, повні метричні простори

КУЗЬМИЧ Юрій Валерійович, аспірант Херсонського державного університету.

Наукові інтереси:

- застосування комп'ютерних інформаційних технологій у навчанні, програмування.