УДК 517.91:532.2

М.П. Ленюк, О. М. Нікітіна

ІНТЕГРАЛЬНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ, ПОРОДЖЕНЕ ГІБРИДНИМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИМ ОПЕРАТОРОМ ЕЙЛЕРА-ЕЙЛЕРА-ФУР'Є НА ПОЛЯРНІЙ ОСІ $r \ge R_0 > 0$

Постановка проблеми та аналіз публікацій за темою дослідження. Одним із ефективних методів побудови точного аналітичного розв'язку алгоритмічною характеру математичної фізики неоднорідних середовищ є метод гібридних інтегральних перетворень, започаткований в роботі Я.С.Уфлянда [1] й розвинутий та математично обґрунтований в роботі [2]. Це дало змогу алгебраїзувати сепаратні системи лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними.

Ціль статті. При моделюванні технологічних процесів за різними степеневими законами з'являються гібридні диференціальні оператори типу Ейлера-Ейлера-Фур'є. Запровадженню інтегрального перетворення, породженого на полярній осі $r \ge R_0 > 0$ з двома точками спряження гібридним диференціальним оператором Ейлера-Ейлера-Фур'є, присвячена ця стаття.

Основна частина. Запровадимо методом дельта-подібної послідовності (ядро Діріхле) інтегральне перетворення, породжене на множині $I_2^+ = \{r : r \in (R_0, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, \infty); R_0 > 0\}$ гібридним диференціальним оператором (ГДО)

$$M_{(\alpha)} = \theta(r - R_0)\theta(R_1 - r)a_1^2 B_{\alpha_1}^* + \theta(r - R_1)\theta(R_2 - r)a_2^2 B_{\alpha_2}^* + \theta(r - R_2)a_3^2 \frac{d^2}{dr^2} \quad (1)$$

Тут $\theta(x)$ - одинична функція Гевісайда [3], $B_\alpha^* = r^2 \frac{d^2}{dr} + (2\alpha + 1)r \frac{d}{dr} + \alpha^2$ - диференціальний оператор Ейлера 2-го порядку [4]; $2\alpha + 1 > 0, (\alpha) = (\alpha_1, \alpha_2).$

<u>Означення.</u> Областю визначення ГДО $M_{(\alpha)}$ назвемо множину *G* вектор-функцій $g(r) = \{g_1(r); g_2(r); g_3(r)\}$ з такими властивостями:

1) вектор-функція $f(r) = \{B_{\alpha_1}^*[g_1(r)]; B_{\alpha_2}^*[g_2(r)]; g_3''(r)\}$ неперервна на множині I_2^+;

2) функції $g_j(r)$ задовольняють крайові умови

$$(\alpha_{11}^0 \tfrac{d}{dr} + \beta_{11}^0) g_1(r)\Big|_{r=R_0} = 0, \ \lim_{r\to\infty} \frac{d^k g_3}{dr^k} = 0, k = 0{,}1; \quad (2)$$

3) функції $g_j(r)$ задовольняють умови спряження

$$[(\alpha_{j_1}^k \tfrac{d}{dr} + \beta_{j_1}^k) g_k(r) - (\alpha_{j_2}^k \tfrac{d}{dr} + \beta_{j_2}^k) g_{k+1}(r)]\Big|_{r=R_k} = 0; j, k = 1{,}2. \quad (3)$$

Оскільки ГДО $M_{(\alpha)}$ самоспряжений і має одну особливу точку $r = \infty$, то його спектр дійсний та неперервний [2]. Можна вважати, що спектральний параметр $\beta \in (0, \infty)$. Йому відповідає дійсна спектральна вектор-функція

$$V_{(\alpha)}(r, \beta) = \sum_{k=1}^{2} \theta(r - R_{k-1})\theta(R_k - r)V_{(\alpha);k}(r, \beta) + \theta(r - R_2)V_{(\alpha);3}(r, \beta) \quad (4)$$

При цьому функції $V_{(\alpha);k}(r, \beta)$ повинні задовольняти відповідно диференціальні рівняння Ейлера та Фур'є

$$(B_{\alpha_1}^* + b_j^2)V_{(\alpha);j}(r, \beta) = 0, r \in (R_{j-1}, R_j), j = 1{,}2,$$

$$(\frac{d^2}{dr^2} + b_3^2)V_{(\alpha);3}(r, \beta) = 0, r \in (R_2, \infty), \quad (5)$$

крайові умови (2) та умови спряження (3); $b_j = a_j^{-1}(\beta^2 + k_j^2)^{1/2}, k_j^2 \ge 0, j = \overline{1,3}.$

В силу лінійності спектральної задачі Штурма-Ліувілля (5), (2), (3) функції $V_{(\alpha);j}(r,\beta)$ будемо відшукувати як лінійну комбінацію фундаментальної системи розв'язків:

$$V_{(\alpha);j}(r,\beta) = A_j r^{-\alpha_j}\cos(b_j \ln r) + B_j r^{-\alpha_j}\sin(b_j \ln r),\ j = 1,2 \tag{6}$$
$$V_{(\alpha);3}(r,\beta) = A_3\cos(b_3 r) + B_3\sin(b_3 r).$$

Крайова умова (2) в точці $r = R_0$ та умови спряження (3) для визначення шести величин $A_j, B_j (j = \overline{1,3})$ дають алгебраїчну систему п'яти рівнянь:

$$Y^{01}_{\alpha_1;11}(b_1,R_0)A_1 + Y^{02}_{\alpha_1;11}(b_1,R_0)B_1 = 0$$
$$Y^{11}_{\alpha_1;j1}(b_1,R_1)A_1 + Y^{12}_{\alpha_1;j1}(b_1,R_1)B_1 - Y^{11}_{\alpha_2;j2}(b_2,R_1)A_2 - Y^{12}_{\alpha_2;j2}(b_2,R_1)B_2 = 0,\ j = 1,2;$$
$$Y^{21}_{\alpha_2;j1}(b_2,R_2)A_2 + Y^{22}_{\alpha_2;j1}(b_2,R_2)B_2 - v^{21}_{j2}(b_3R_2)A_3 - v^{22}_{j2}(b_3R_2)B_3 = 0. \tag{7}$$

Алгебраїчна система (7) сумісна [5]. У результаті стандартного розв'язання алгебраїчної системи (7) й підстановки одержаних значень A_j та $B_j (j = \overline{1,3})$ у рівності (6) маємо функції:

$$V_{(\alpha);1}(r,\beta) = q_{\alpha_2}(\beta)c_{22}b_3[Y^{02}_{\alpha_1;11}(b_1,R_0)r^{-\alpha_1}\cos(b_1 \ln r) - Y^{01}_{\alpha_1;11}(b_1,R_0)r^{-\alpha_1}\sin(b_1 \ln r)],$$
$$V_{(\alpha);2}(r,\beta) = c_{22}b_3\{\delta_{\alpha_1;21}(b_1,R_0,R_1)[Y^{12}_{\alpha_2;12}(b_2,R_1)r^{-\alpha_2}\cos(b_2 \ln r) - Y^{11}_{\alpha_2;12}(b_2,R_1)\times$$
$$\times r^{-\alpha_2}\sin(b_2 \ln r)] - \delta_{\alpha_1;11}(b_1;R_0,R_1)[Y^{12}_{\alpha_2;22}(b_2,R_1)r^{-\alpha_2}\cos(b_2 \ln r) -$$
$$Y^{11}_{\alpha_2;22}(b_2,R_1)r^{-\alpha_2}\sin(b_2 \ln r)]\}$$
$$V_{(\alpha);3}(r,\beta) = \omega_{(\alpha);2}(\beta)\cos(b_3 r) - \omega_{(\alpha);1}(\beta)\sin(b_3 r). \tag{8}$$

У рівностях (8) беруть участь функції:

$$\delta_{\alpha_1;j_1}(b_1;R_0,R_1) = Y^{01}_{\alpha_1;11}(b_1,R_0)Y^{12}_{\alpha_1;j1}(b_1;R_1) - Y^{02}_{\alpha_1;11}(b_1,R_0)Y^{11}_{\alpha_1;j1}(b_1,R_1);\ j = 1,2;$$
$$\delta_{\alpha_2;jk}(b_1;R_0,R_1) = Y^{11}_{\alpha_2;j2}(b_2,R_1)Y^{22}_{\alpha_2;k1}(b_2,R_2) - Y^{12}_{\alpha_2;j2}(b_2,R_1)Y^{21}_{\alpha_2;k1}(b_2,R_2);\ j,k = 1,2;$$
$$a_{(\alpha);j}(\beta) = \delta_{\alpha_1;11}\delta_{\alpha_2;2j} - \delta_{\alpha_1;21}\delta_{\alpha_2;1j}(b_2R_1,b_2R_2);\ q_{\alpha_2}(\beta) = c_{21}b_2R_1^{-(2\alpha_2+1)}$$
$$\omega_{(\alpha);j}(\beta) = a_{(\alpha);1}(\beta)v^{2j}_{22}(b_3R_2) - a_{(\alpha);2}(\beta)v^{2j}_{12}(b_3R_2),\ j = 1,2.$$

Всі інші функції загальноприйняті [2].

Визначимо величини:

$$a_1^2\sigma_1 = \frac{c_{11}c_{12}}{c_{21}c_{22}}\frac{R_1^{2\alpha_2+1}}{R_1^{2\alpha_1+1}}\frac{1}{R_2^{2\alpha_2+1}},\ a_2^2\sigma_2 = \frac{c_{12}}{c_{22}}\frac{1}{R_2^{2\alpha+1}},\ a_3^2\sigma_3 = 1;$$
$$c_{jk} = \alpha_{2j}^k\beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k\beta_{2j}^k,$$

вагову функцію

$$\sigma(r) = \sum_{k=1}^{2}\theta(r - R_{k-1})\theta(R_k - r)\sigma_k r^{2\alpha_k - 1} + \theta(r - R_2)\sigma_3$$

та спектральну щільність

$$\Omega_{(\alpha)}(\beta) = \beta[b_3(\beta)]^{-1}([\omega_{(\alpha);1}(\beta)]^2 + [\omega_{(\alpha);2}(\beta)]^2)^{-1}.$$

Наявність вагової функції $\sigma(r)$, спектральної функції $V_{(\alpha)}(r,\beta)$ та спектральної щільності $\Omega_{(\alpha)}(\beta)$ дозволяє визначити пряме $H_{(\alpha)}$ та обернене $H_{(\alpha)}^{-1}$ гібридне інтегральне перетворення (ГІП), породжене на множині I_2^+ ГДО $M_{(\alpha)}$, визначеного рівністю (1) [6]:

$$H_{(\alpha)}[g(r)] = \int_{R_0}^{\infty} g(r)V_{(\alpha)}(r,\beta)\sigma(r)dr \equiv \tilde{g}(\beta), \tag{9}$$

$$H_{(\alpha)}^{-1}[\tilde{g}(\beta)] = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \tilde{g}(\beta)V_{(\alpha)}(r,\beta)\Omega_{(\alpha)}(\beta)d\beta \equiv g(r) \tag{10}$$

Математичним обґрунтуванням правил (9), (10) є твердження.

Теорема 1 (про інтегральне зображення). Якщо вектор – функція

$$f(r) = [\sum_{k=1}^{2} \theta(r-R_{k-1})\theta(R_k - r)r^{\alpha_k - 1/2} + \theta(r-R_2)\cdot 1]g(r)$$

неперервна, абсолютно сумовна й має обмежену варіацію на множині (R_0,∞), то для будь-якого $r \in I_2^+$ справджується інтегральне зображення:

$$g(r) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} V_{(\alpha)}(r,\beta)\int_{R_0}^{\infty} g(\rho)V_{(\alpha)}(\rho,\beta)\sigma(\rho)d\rho\Omega_{(\alpha)}(\beta)d\beta \tag{11}$$

Доведення: Доведення теореми базується на значенні подвійного невласного інтеграла

$$I = \frac{2}{\pi}\int_{R_0}^{\infty}\int_0^{\infty}\psi(\lambda)V_{(\alpha)}(r,\lambda)\Omega_{(\alpha)}(\lambda)d\lambda V_{(\alpha)}(r,\beta)\sigma(r)dr = \psi(\beta), \tag{12}$$

якщо $\beta = \lambda \in (0,\infty)$, та дорівнює нулю, якщо $\beta = \lambda \bar{\in} (0,\infty)$. Функція $\psi(\lambda)$ забезпечує абсолютну й рівномірну збіжність інтеграла по λ. Рівність (12) отримуємо методом дельта-подібної послідовності (ядро Діріхле) [6].

Припустимо тепер, що функція

$$g(r) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\psi(\beta)V_{(\alpha)}(r,\beta)\Omega_{(\alpha)}(\beta)d\beta \tag{13}$$

Помножимо рівність (13) на вираз $V_{(\alpha)}(r,\lambda)\sigma(r)dr$ і проінтегруємо по r від $r = R_0$, до $r = \infty$. В силу рівності (12) отримуємо:

$$\int_{R_0}^{\infty} g(r)V_{(\alpha)}(r,\lambda)\sigma(r)dr = \psi(\lambda) \tag{14}$$

Підставивши в (13) функцію

$$\psi(\beta) = \int_{R_0}^{\infty} g(\rho)V_{(\alpha)}(\rho,\beta)\sigma(\rho)d\rho,$$

приходимо до інтегрального зображення (11).

Доведення теореми завершено.

Введемо до розгляду величини та функції:

$$d_1 = a_1^2\sigma_1 R_1^{2\alpha_1+1} : c_{11}, \quad d_2 = a_2^2\sigma_2 R_1^{2\alpha_2+1} : c_{12}, \quad \tilde{g}_1(\beta) = \int_{R_0}^{R_1} g_1(r)V_{(\alpha);1}^{(\mu)}(r,\beta)\sigma_1 r^{2\alpha_1-1}dr,$$

$$\tilde{g}_2(\beta) = \int_{R_1}^{R_2} g_2(r)V_{\alpha;2}(r,\beta)\sigma_2 r^{2\alpha_2-1}dr, \quad \tilde{g}_3(\beta) = \int_{R_2}^{\infty} g_3(r)V_{\alpha;3}(r,\beta_n)\sigma_3 dr,$$

$$Z^k_{(\alpha;)i2}(\beta) = (\alpha^k_{i2}\frac{d}{dr} + \beta^k_{i2})V_{(\alpha);k+1}(r,\beta_n)\,|_{r=R_k};\;\; i,k = 1,2.$$

Теорема 2 (про основну тотожність). Якщо вектор-функція $f(r) = \{B^*_{\alpha_1}[g_1(r)]; B^*_{\alpha_2}[g_2(r)]; g''_3(r)\}$ неперервна на множині I_2^+, а функції $g_j(r)$ задовольняють крайові умови

$$[(\alpha^0_{11}\,d\!\diagup\!dr + \beta^0_{11})g_1(r)]\Big|_{r=R_0} = g_0,\;\; \lim_{r\to\infty}[(\frac{dg_3}{dr}V_{(\alpha);3}(r,\beta) - g_3(r)\frac{dV_{(\alpha);3}}{dr})] = 0 \quad (15)$$

та умови спряження

$$[(\alpha^k_{j1}\,d\!\diagup\!dr + \beta^k_{j1})g_k(r) - (\alpha^k_{j2}\,d\!\diagup\!dr + \beta^k_{j2})g_{k+1}(r)]\Big|_{r=R_k} = \omega_{jk};\, j,k = 1,2, \quad (16)$$

то має місце основна тотожність ГІП ГДО $M_{(\alpha)}$:

$$H_{(\alpha)}[M_{(\alpha)}[g(r)]] = -\beta^2\tilde{g}(\beta) - \sum_{i=1}^{3}k_i^2\tilde{g}_i(\beta) + (-\alpha^0_{11})^{-1}V_{(\alpha);1}(R_0,\beta)\sigma_1 a_1^2 R_0^{2\alpha_1+1}g_0 +$$
$$+\sum_{k=1}^{2}d_k[Z^k_{(\alpha);12}(\beta)\omega_{2k} - Z^k_{(\alpha);22}(\beta)\omega_{1k}] \quad (17)$$

Доведення теореми здійснюється за відомою логічною схемою [7].

Висновок: Одержані правила (9), (10) та (17) складають достатньо ефективний математичний апарат для одержання інтегрального зображення точних аналітичних розв'язків алгоритмічного характеру відповідних стаціонарних і не стаціонарних задач математичної фізики кусково-однорідних середовищ.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Уфлянд Я. С. О некоторых новых интегральных преобразованиях и их приложениях к задачам математической физики / Я.С. Уфлянд //Вопросы математической физики. - Л., 1976. - С.93-106.
2. Ленюк М.П. Гібридні інтегральні перетворення (Фур'є, Бесселя, Лежандра). Частина 1 / М.П. Ленюк, М.І.Шинкарик. – Тернопіль: Економ. думка, 2004. – 368 с.
3. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальний курс / Г.Е. Шилов. – М.: Наука, 1965. – 328 с.
4. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений / В.В. Степанов - М. : Физматгиз, 1959.- 468 с.
5. Курош А.Г. Курс высшей алгебры / А.Г. Курош – М.: Наука, 1971. – 432с.
6. Ленюк М.П. Гібридні інтегральні перетворення типу Ейлера-(Фур'є, Бесселя) / М.П. Ленюк. – Львів, 2009. – 76 с. - (Препринт/НАН України. Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача; 02.09) – Чернівці: Прут, 2009. – 76 с.
7. Нікітіна О.М. Інтегральне перетворення, породжене на сегменті $[0, R_3]$ гібридним диференціальним оператором Ейлера-Фур'є-Ейлера / О.М. Нікітіна // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. пр. – Чернівці: Прут, 2012. – Вип. 21(37). – С.233-239.

ЛЕНЮК Михайло Павлович – д.ф.-м.н, професор ЧФ НТУ "ХПІ".
Наукові інтереси:
- математична фізика, математичний аналіз, математичне моделювання.

НІКІТІНА Ольга Михайлівна – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри "Інформаційні системи" Чернівецького факультету НТУ "ХПІ".
Наукові інтереси:
- математична фізика, математичний аналіз.