УДК 517.91:532.2.

М.П. Ленюк, М.І. Шинкарик

СКІНЧЕННЕ ГІБРИДНЕ ІНТЕГРАЛЬНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ТИПУ ЛЕЖАНДРА-ФУР'Є-БЕССЕЛЯ НА СЕГМЕНТІ $[0, R_3]$

Постановка проблеми. Вивчення фізико-технічних характеристик композитних матеріалів, які знаходяться в різних умовах експлуатації, математично приводить до задач інтегрування сепаратної системи диференціальних рівнянь другого порядку на кусково-однорідному інтервалі з відповідним початковими та крайовими умовами [1-3]. Одним із ефективним методів побудови інтегральних зображень аналітичних розв'язків алгоритмічного характеру таких задач є метод гібридних інтегральних перетворень. Основні положення скінченних гібридних інтегральних перетворень закладено в роботі [4].

Ціль статті. В даній роботі побудовано скінченне гібридне інтегральне перетворення (СГІП), породжене на сегменті $[0, R_3]$ з двома точками спряження гібридним диференціальним оператором Лежандра - Фур'є - Бесселя.

Основна частина. Побудуємо інтегральне перетворення, породжене на множині $I_2 = \{\mathrm{r} : \mathrm{r} \in (0, \mathrm{R}_1) \cup (\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2) \cup (\mathrm{R}_2, \mathrm{R}_3); R_3 < \infty\}$ гібридним диферен-ціальним оператором (ГДО)

$$M_{\nu,\alpha}^{(\mu)} = \theta(r)\theta(R_1 - r)a_1^2\Lambda_{(\mu)} + \theta(r - R_1)\theta(R_2 - r) \times$$
$$\times a_2^2 \frac{d^2}{dr^2} + \theta(r - R_2)\theta(R_3 - r)a_3^2 B_{\nu,\alpha} \tag{1}$$

У рівності (1) $\theta(x)$ - одинична функція Гевісайда [5], $\Lambda_{(\mu)}$ - узагальнений диференціальний оператор Лежандра [6], $\frac{d^2}{dr^2}$ - диференціальний оператор Фур'є другого порядку [7], $B_{\nu,\alpha}$ - диференціальний оператор Бесселя [8].

<u>**Означення**</u>: Областю задання ГДО $M_{\nu,\alpha}^{(\mu)}$ назвемо множину G вектор-функцій $g(r) = \{g_1(r); g_2(r); g_3(r)\}$ з такими властивостями:

1) вектор-функція $f(r) = \{\Lambda_{(\mu)}[g_1(r)]; g_2''(r); B_{\nu,\alpha}[g_3]\}$ неперервна на множині I_2;

2) функції $g_j(r)$ задовольняють крайові умови

$$\lim_{r \to 0}[shr g_1(r)] = 0, \ (\alpha_{22}^3 \frac{d}{dr} + \beta_{22}^3) g_3(r) = 0 \tag{2}$$

3) функції $g_j(r)$ задовольняють умови спряження

$$[(\alpha_{j1}^k \frac{d}{dr} + \beta_{j1}^k) g_k(r) - (\alpha_{j2}^k \frac{d}{dr} + \beta_{j2}^k) g_{k+1}(r)]\Big|_{r=R_k} = 0; \quad j,k = 1,2 \tag{3}$$

Умови на коефіцієнти: $a_1 > 0, \ a_2 > 0, \ a_3 > 0; \ \alpha_{22}^3 \geq 0, \beta_{22}^3 \geq 0,$

$\alpha_{22}^3 + \beta_{22}^3 \neq 0; \ \alpha_{jm}^k \geq 0, \ \beta_{jm}^k \geq 0, \ c_{jk} = \alpha_{2j}^k \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \beta_{2j}^k; \ c_{1k} \cdot c_{2k} > 0; \ 2\alpha + 1 > 0,$

$\nu \geq \alpha, \ \mu_1 \geq \mu_2 \geq 0, \ (\mu) = (\mu_1, \mu_2).$

З умов спряження (3) випливає базова тотожність: якщо вектор-функція $u(r) = \{u_1(r); u_2(r); u_3(r)\} \in G$ та вектор-функція $v(r) = \{v_1(r); v_2(r); v_3(r)\}$ $\in G$, то має місце рівність

$$[u'_k(r)v_k(r)-u_k(r)v'_k(r)]\Big|_{r=R_k}=\frac{c_{2k}}{c_{1k}}[u'_{k+1}(r)v_{k+1}(r)-u_{k+1}(r)v'_{k+1}(r)]\Big|_{r=R_k};k=1,2 \quad (4)$$

Визначимо числа

$$a_1^2\sigma_1=\frac{c_{11}c_{12}}{c_{21}c_{22}}\frac{R_2^{2\alpha+1}}{shR_1},\ \ a_2^2\sigma_2=\frac{c_{12}}{c_{22}}R_2^{2\alpha+1},\ \ a_3^2\sigma_3=1,$$

вагову функцію

$$\sigma(r)=\theta(r)\theta(R_1-r)\sigma_1 shr+\theta(r-R_1)\theta(R_2-r)\sigma_2+\theta(r-R_2)\theta(R_3-r)\sigma_3 r^{2\alpha+1} \quad (5)$$

та скалярний добуток

$$(u(r),v(r))=\int_0^{R_3}u(r)v(r)\sigma(r)dr\equiv\int_0^{R_1}u_1(r)v_1(r)\sigma_1 shrdr+$$

$$+\int_{R_1}^{R_2}u_2(r)v_2(r)\sigma_2 dr+\int_{R_2}^{R_3}u_3(r)v_3(r)\sigma_3 r^{2\alpha+1}dr;\ \ u(r)\in G,v(r)\in G \quad (6)$$

Наявність скалярного добутку (6), базової тотожності (4) та однорідних крайових умов (2) дозволяє показати виконання рівності

$$(M_{\nu,\alpha}^{(\mu)}[u(r)],v(r))=(u(r),M_{\nu,\alpha}^{(\mu)}[v(r)]) \quad (7)$$

Рівність (7) показує, що ГДО $M_{\nu,\alpha}^{(\mu)}$ самоспряжений оператор. Отже, його спектр дійсний. Оскільки ГДО $M_{\nu,\alpha}^{(\mu)}$ на множині I_2 не має особливої точки, то його спектр дискретний [9]. При цьому спектральному параметру β відповідає дійсна спектральна вектор-функція

$$V_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta)=\sum_{m=1}^{3}\theta(r-R_{m-1})\theta(R_m-r)V_{\nu,\alpha;m}^{(\mu)}(r,\beta),\ \ R_0=0 \quad (8)$$

Функції $V_{\nu,\alpha;m}^{(\mu)}(r,\beta)$ повинні задовольняти відповідно диференціальні рівняння Лежандра, Фур'є та Бесселя для звичайних функцій

$$(\Lambda_{(\mu)}+b_1^2)V_{\nu,\alpha,1}^{(\mu)}(r,\beta)=0,\quad r\in(0,R_1)$$

$$(\frac{d^2}{dr^2}+b_2^2)V_{\nu,\alpha,2}^{(\mu)}(r,\beta)=0,\quad r\in(R_1,R_2), \quad (9)$$

$$(B_{\nu,\alpha}+b_3^2)V_{\nu,\alpha,3}^{(\mu)}(r,\beta)=0,\quad r\in(R_2,R_3),$$

крайові умови (2) та умови спряження (3); $b_j=a_j^{-1}(\beta^2+k_j^2)^{\frac{1}{2}},\ \ k_j^2\geq 0.$

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Лежандра $(\Lambda_{(\mu)}+b_1^2)v=0$ утворюють узагальнені приєднання функції Лежандра першого роду $P_{\nu_1^*}^{(\mu)}(chr)$ та другого роду $L_{\nu_1^*}^{(\mu)}(chr)$; $\nu_1^*=-\frac{1}{2}+ib_1(\beta)$ [6]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Фур'є $(\frac{d^2}{dr^2}+b_2^2)v=0$ утворюють тригонометричні функції $\cos(b_2 r)$ та $\sin(b_2 r)$ [7]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння

Бесселя $(B_{\nu,\alpha}+b_3^2)v=0$ утворюють функції Бесселя дійсного аргумента першого роду $J_{\nu,\alpha}(b_3r)$ та другого роду $N_{\nu,\alpha}(b_3r)$ [8].

В силу того, що спектральна задача Штурма-Ліувілля (2), (3) й (9) регулярна та лінійна, покладемо:

$$V_{\nu,\alpha;1}^{(\mu)}(r,\beta)=A_1P_{\nu_1^*}^{(\mu)}(chr),r\in(0,R_1)$$

$$V_{\nu,\alpha;2}^{(\mu)}(r,\beta)=A_2\cos(b_2r)+B_2\sin(b_2r),r\in(R_1,R_2) \tag{10}$$

$$V_{\nu,\alpha;3}^{(\mu)}(r,\beta)=A_3J_{\nu,\alpha}(b_3r)+B_3N_{\nu,\alpha}(b_3r),r\in(R_2,R_3).$$

Умови спряження (3) та крайова умова в точці $r=R_3$ дають для визначення п'яти величин $A_j(j=\overline{1,3})$ та $B_k(k=2,3)$ однорідну алгебраїчну систему із п'яти рівнянь:

$$Z_{\nu_1^*;j1}^{(\mu);11}(chR_1)A_1-v_{j2}^{11}(b_2R_1)A_2-v_{j2}^{12}(b_2R_1)B_2=0,\ j=1,2;$$

$$v_{j1}^{21}(b_2R_2)A_2+v_{j1}^{22}(b_2R_2)B_2-u_{\nu,\alpha;j2}^{21}(b_3R_2)A_3-u_{\nu,\alpha;j2}^{22}(b_3R_2)B_3=0$$

$$u_{\nu,\alpha;22}^{31}(b_3R_3)A_3+u_{\nu,\alpha;22}^{32}(b_3R_3)B_3=0 \tag{11}$$

Введемо до розгляду функції

$$\delta_{jk}(b_2R_1,b_2R_2)=v_{j2}^{11}(b_2R_1)v_{k1}^{22}(b_2R_2)-v_{j2}^{12}(b_2R_1)v_{k1}^{21}(b_2R_2);\quad j,k=1,2;$$

$$\delta_{\nu,\alpha;j2}(b_3R_2,b_3R_3)=u_{\nu,\alpha;j2}^{21}(b_3R_2)u_{\nu,\alpha;22}^{32}(b_3R_3)-u_{\nu,\alpha;j2}^{22}(b_3R_2)u_{\nu,\alpha;22}^{31}(b_3R_3),\quad j=1,2;$$

$$a_{(\mu);j}(\beta)=Z_{\nu_1^*;11}^{(\mu);11}(chR_1)\delta_{2j}(b_2R_1,b_2R_2)-Z_{\nu_1^*;21}^{(\mu);11}(chR_1)\delta_{1j}(b_2R_1,b_2R_2)$$

$$b_{\nu,\alpha;j}^{(\mu)}(\beta)=\delta_{\nu,\alpha;22}(b_3R_2,b_3R_3)\delta_{j1}(b_2R_1,b_2R_2)-\delta_{\nu,\alpha;12}(b_3R_2,b_3R_3)\delta_{j2}(b_2R_1,b_2R_2).$$

Для того, щоб алгебраїчна система (11) мала ненульові розв'язки, необхідно і досить, щоб визначник системи був рівний нулю [10]:

$$\delta_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(\beta)\equiv Z_{\nu_1;11}^{(\mu);11}(chR_1)b_{\nu,\alpha;2}(\beta)-Z_{\nu_1;21}^{(\mu);11}(chR_1)b_{\nu,\alpha;1}(\beta)=$$

$$=\delta_{\nu,\alpha;22}(b_3R_2,b_3R_3)a_{(\mu);1}(\beta)-\delta_{\nu,\alpha;12}(b_3R_2,b_3R_3)a_{(\mu);2}(\beta)=0 \tag{12}$$

Ми одержали трансцендентне рівняння для обчислення власних чисел β_n ГДО $M_{\nu,\alpha}^{(\mu)}$.

Підставимо в алгебраїчну систему (11) $\beta=\beta_n$ $(b_j(\beta_n)=b_{jn})$ й відкинемо останнє рівняння в силу лінійної залежності. При $A_1\neq0$ маємо алгебраїчну систему двох рівнянь для визначення A_2,B_2 :

$$v_{j2}^{11}(b_{2n}R_1)A_2+v_{j2}^{12}(b_{2n}R_1)B_2=A_1Z_{\nu_{1n}^*;j1}^{(\mu);11}(chR_1),\quad j=1,2 \tag{13}$$

Визначник алгебраїчної системи (13) обчислюється безпосередньо:

$$v_{12}^{11}(b_{2n}R_1)v_{22}^{12}(b_{2n}R_1)-v_{22}^{11}(b_{2n}R_1)v_{12}^{12}(b_{2n}R_1)=c_{21}b_{2n}\neq0.$$

Алгебраїчна система (13) має єдиний розв'язок [10]:

$$A_2=\frac{A_1}{c_{21}b_{2n}}[Z_{\nu_{1n}^*;11}^{(\mu);11}(chR_1)v_{22}^{12}(b_{2n}R_1)-Z_{\nu_{1n}^*;21}^{(\mu);11}(chR_1)v_{12}^{12}(b_{2n}R_1)],$$

$$B_2 = \frac{A_1}{c_{21}b_{2n}}[Z^{(\mu);11}_{\nu^*_{1n};21}(chR_1)\nu^{11}_{12}(b_{2n}R_1) - Z^{(\mu);11}_{\nu^*_{1n};11}(chR_1)\nu^{11}_{22}(b_{2n}R_1)] \qquad (14)$$

При відомих A_2, B_2 для визначення A_3, B_3 маємо алгебраїчну систему двох рівнянь:

$$u^{21}_{\nu,\alpha;j2}(b_{3n}R_2)A_3 + u^{22}_{\nu,\alpha;j2}(b_{3n}R_2)B_3 = -A_1[c_{21}b_{2n}]^{-1}a_{(\mu);j}(\beta_n); \quad j=1,2 \qquad (15)$$

Визначник алгебраїчної системи (15) обчислюється безпосередньо:

$$u^{21}_{\nu,\alpha;12}(b_{3n}R_2)u^{22}_{\nu,\alpha;22}(b_{3n}R_2) - u^{21}_{\nu,\alpha;22}(b_{3n}R_2)u^{22}_{\nu,\alpha;12}(b_{3n}R_2) = \frac{2}{\pi}\frac{c_{22}}{b^{2\alpha}_{3n}R^{2\alpha+1}_2} \equiv q_\alpha(\beta_n) \neq 0$$

Алгебраїчна система (15) має єдиний розв'язок [10]:

$$A_1 = c_{21}b_{2n}q_\alpha(\beta_n), \quad A_3 = -\omega^{(\mu)}_{\nu,\alpha;2}(\beta_n), \quad B_3 = \omega^{(\mu)}_{\nu,\alpha;1}(\beta_n), \qquad (16)$$

$$\omega^{(\mu)}_{\nu,\alpha;j}(\beta_n) = a_{(\mu);2}(\beta_n)u^{2j}_{\nu,\alpha;12}(b_{3n}R_2) - a_{(\mu);1}(\beta_n)u^{2j}_{\nu,\alpha;22}(b_{3n}R_2), \quad j=1,2$$

Підставимо визначені формулами (14) та (16) величини $A_j, B_k (j=\overline{1,2}; k=2,3)$ у рівності (10). Одержимо функції:

$$\begin{aligned}
&V^{(\mu)}_{\nu,\alpha;1}(r,\beta_n) = c_{21}b_{2n}q_\alpha(\beta_n)P^{(\mu)}_{\nu^*_{1n}}(chr), \quad \nu^*_{1n} = -\frac{1}{2} + ib_{1n}\\
&V^{(\mu)}_{\nu,\alpha;2}(r,\beta_n) = q_\alpha(\beta_n)[Z^{(\mu);11}_{\nu^*_{1n};11}(chR_1)\varphi^1_{22}(b_{2n}R_1, b_{2n}r) -\\
&- Z^{(\mu);11}_{\nu^*_{1n};21}(chR_1)\varphi^1_{12}(b_{2n}R_1, b_{2n}r)],\\
&\varphi^1_{j2}(b_{2n}R_1, b_{2n}r) = \nu^{12}_{j2}(b_{2n}R_1)\cos(b_{2n}r) - \nu^{11}_{j2}(b_{2n}R_1)\sin(b_{2n}r),\\
&V^{(\mu)}_{\nu,\alpha;3}(r,\beta_n) = \omega^{(\mu)}_{\nu,\alpha;1}(\beta_n)N_{\nu,\alpha}(b_{3n}r) - \omega^{(\mu)}_{\nu,\alpha;2}(\beta_n)J_{\nu,\alpha}(b_{3n}r).
\end{aligned} \qquad (17)$$

Згідно рівності (8) спектральна вектор-функція $V^{(\mu)}_{\nu,\alpha}(r,\beta_n)$ визначена. Її квадрат норми визначається за стандартним правилом [10]:

$$\|V^{(\mu)}_{\nu,\alpha}(r,\beta_n)\|^2 = (V^{(\mu)}_{\nu,\alpha}(r,\beta_n), V^{(\mu)}_{\nu,\alpha}(r,\beta_n)) = \int_0^{R_3}[V^{(\mu)}_{\nu,\alpha}(r,\beta_n)]^2\sigma(r)dr \equiv$$

$$\equiv \int_0^{R_1}[V^{(\mu)}_{\nu,\alpha;1}(r,\beta_n)]^2\sigma_1 shr dr + \int_{R_1}^{R_2}[V^{(\mu)}_{\nu,\alpha;2}(r,\beta_n)]^2\sigma_2 dr + \int_{R_2}^{R_3}[V^{(\mu)}_{\nu,\alpha;3}(r,\beta_n)]^2\sigma_3 r^{2\alpha+1}dr \qquad (18)$$

Згідно з роботою [4] наведемо твердження.

Теорема 1 (про дискретний спектр). Корені β_n трансцендентного рівняння $\delta^{(\mu)}_{\nu,\alpha}(\beta) = 0$ складають дискретний спектр ГДО $M^{(\mu)}_{\nu,\alpha}$: дійсні, різні, симетрично розташовані відносно $\beta = 0$ й на піввісі $\beta > 0$ утворюють монотонно зростаючу числову послідовність з єдиною граничною точкою $\beta = \infty$.

Теорема 2 (про дискретну функцію). Система власних функцій $\{V^{(\mu)}_{\nu,\alpha}(r,\beta_n)\}^\infty_{n=1}$ ортогональна на множині I_2 з ваговою функцією $\sigma(r)$, повна й замкнена.

Теорема 3 (про зображення рядом Фур'є). Будь-яка вектор-функція $g(r) \in G$ зображається за системою $\{V^{(\mu)}_{\nu,\alpha}(r,\beta_n)\}^\infty_{n=1}$ абсолютно й рівномірно збіжним на множині I_2 рядом Фур'є:

$$g(r)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{0}^{R_3} g(\rho)\mathrm{V}_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(\rho,\beta_n)\sigma(\rho)d\rho\frac{\mathrm{V}_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta_n)}{\|\mathrm{V}_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta_n)\|^2} \tag{19}$$

В подальшому зручно перейти до ортонормованої системи власних функцій:

$$\{v_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta_n)\}_{n=1}^{\infty}=\{\mathrm{V}_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta_n):\|\mathrm{V}_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta_n)\|\}_{n=1}^{\infty}$$

Ряд Фур'є (19) набуває вигляду

$$g(r)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{0}^{R_3} g(\rho)v_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(\rho,\beta_n)\sigma(\rho)d\rho v_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta_n) \tag{20}$$

Ряд Фур'є (20) визначає пряме $H_{\nu,\alpha}^{(\mu)}$ й обернене $H_{\nu,\alpha}^{-(\mu)}$ скінченне гібридне інтегральне перетворення (СГІП), породжене на множині I_2 ГДО $M_{\nu,\alpha}^{(\mu)}$:

$$H_{\nu,\alpha}^{(\mu)}[g(r)]=\int_{0}^{R_3} g(r)v_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta_n)\sigma(r)dr\equiv\tilde{g}_n \tag{21}$$

$$H_{\nu,\alpha}^{-(\mu)}[\tilde{g}_n]=\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{g}_n v_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta_n)\equiv g(r) \tag{22}$$

Визначимо величини та функції:

$$d_1=a_1^2\sigma_1 shR_1:c_{11},\ \ d_2=a_2^2\sigma_2:c_{12},\ \ \tilde{g}_{1n}=\int_{0}^{R_1} g_1(r)v_{\nu,\alpha;1}^{(\mu)}(r,\beta_n)\sigma_1 shrdr,$$

$$\tilde{g}_{2n}=\int_{R_1}^{R_2} g_2(r)v_{\nu,\alpha;2}^{(\mu)}(r,\beta_n)\sigma_2 dr,\ \ \tilde{g}_{3n}=\int_{R_2}^{R_3} g_3(r)v_{\nu,\alpha;3}^{(\mu)}(r,\beta_n)\sigma_3 r^{2\alpha+1}dr,$$

$$Z_{\nu,\alpha;m2}^{(\mu),k}(\beta_n)=(\alpha_{m2}^k\frac{d}{dr}+\beta_{m2}^k)v_{\nu,\alpha;k+1}^{(\mu)}(r,\beta_n)|_{r=R_k};\ \ m,k=1,2.$$

__Теорема 4__ (про основну тотожність). Якщо вектор-функція $f(r)=\{\Lambda_{(\mu)}[g_1(r)];\ g_2''(r);\ B_{\nu,\alpha}[g_3(r)]\}$ неперервна на множині I_2, а функції $g_j(r)$ задовольняють умови спряження

$$[(\alpha_{j1}^k\frac{d}{dr}+\beta_{j1}^k)g_k(r)-(\alpha_{j2}^k\frac{d}{dr}+\beta_{j2}^k)g_{k+1}(r)]|_{r=R_k}=\omega_{jk};\ \ j,k=1,2, \tag{23}$$

та крайові умови

$$\lim_{r\to 0}[shrg_1(r)]=0,\ \ (\alpha_{22}^3\frac{d}{dr}+\beta_{22}^3)g_3(r)|_{r=R_3}=g_R \tag{24}$$

то має місце основна тотожність СГІП ГДО $M_{\nu,\alpha}^{(\mu)}$:

$$H_{\nu,\alpha}^{(\mu)}[M_{\nu,\alpha}^{(\mu)}[g(r)]]=-\beta_n^2\tilde{g}_n-\sum_{i=1}^{3}k_i^2\tilde{g}_{in}+(\alpha_{22}^3)^{-1}v_{\nu,\alpha;3}^{(\mu)}(R_3,\beta_n)R_3^{2\alpha+1}g_R+$$

$$+\sum_{k=1}^{2}d_k[Z_{\nu,\alpha;12}^{(\mu),k}(\beta_n)\omega_{2k}-Z_{\nu,\alpha;22}^{(\mu),k}(\beta_n)\omega_{1k}] \tag{25}$$

Висновок. Побудовані правила (21), (22) та (25) складають математичний апарат для одержання інтегрального зображення точного аналітичного розв'язку відповідних задач математичної фізики кусково-однорідних середовищ.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Коляно Ю.М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела / Ю.М. Коляно. – К.: Наук. Думка, 1992. – 280с.
2. Ленюк М.П. Температурні поля в плоских кусково-однорідних ортотропних областях / М.П. Ленюк. – К.: Ін-т математики НАН України, 1997. – 188с.
3. Конет І.М. Температурні поля в кусково-однорідних циліндричних областях / І.М. Конет, М.П. Ленюк. – Чернівці.: Прут, 2004. – 276с.
4. Комаров Г.М. Скінченні гібридні інтегральні перетворення, породжені диференціальними рівняннями другого порядку / Г.М. Комаров, М.П. Ленюк, В.В. Мороз. – Чернівці: Прут, 2001. – 228с.
5. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальний курс. – М.: Наука, 1965. – 328с.
6. Конет І.М., Ленюк М.П. Інтегральні перетворення типу Мелера-Фока. – Чернівці: Прут, 2002. – 248с.
7. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений / В.В. Степанов. – М.: Физматгиз, 1959. – 468с.
8. Ленюк М.П. Исследование основных краевых задач для диссипативного волнового уравнения Бесселя. - Киев, 1983. – 62с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.3).
9. Ленюк М.П. Гібридні інтегральні перетворення (Фур'є, Бесселя, Лежандра). Частина 1. / М.П. Ленюк, М.І. Шинкарик. – Тернопіль: Економ.думка, 2004. – 368с.
10. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1971. – 432с.
11. Ленюк М.П. Скінченні гібридні інтегральні перетворення, породжені класичними диференціальними операторами математичної фізики. Том 1. / М.П. Ленюк. – Чернівці: Прут, 2010. – 352с.

ЛЕНЮК Михайло Павлович – д.ф.-м.н, професор ЧФ НТУ «ХПІ».
Наукові інтереси:
- математична фізика, математичний аналіз, математичне моделювання.

ШИНКАРИК Микола Іванович - к.ф.-м.н, доцент кафедри вищої математики Тернопільського національного економічного університету.
Наукові інтереси:
- математична фізика, математичний аналіз, математичне моделювання.