УДК 004.92 : 519.6

О.І. Литвиненко

МОДИФІКОВАНА ПРОЦЕДУРА ГЕНЕРУВАННЯ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ЗМІШАНОГО ТИПУ

Постановка проблеми. Регулярне скінченно-елементне розбиття області, зазвичай, потребує великої кількості скінченних елементів (СЕ) для відтворення геометричних характеристик реальної конструкції, але не приводить до суттєвого покращення представлення фізичних полів, тому для апроксимації складних поверхонь у методі скінченних елементів (МСЕ) краще використовувати криволінійні скінченні елементи. Побудова криволінійного елемента відбувається на базі "породжуючого" стандартного елемента за допомогою параметричного відображення. Якщо при цьому перетворення координат і апроксимація невідомих величин здійснюється однаковими функціями, то елементи називають ізопараметричними. Перший такий елемент у розрахунках використав Тейг у 1961 р. Потім цю ідею узагальнили і розвинули у 1968 р. Ергатудіс, Айронс, Зенкевич [1]. Цікавим класом ізопараметричних елементів є скінченні елементи серендипової сім'ї (ССЕ), які більш придатні для параметричних перетворень, ніж лагранжеві СЕ, бо не мають "зайвих" внутрішніх вузлів [2]. При побудові базису серендипових СЕ використовують процедуру систематичного генерування базису (метод Тейлора) [3, 4]. Метод Тейлора [5] - дуже простий і ефективний алгоритм побудови базисів одно-, дво- і тривимірних скінченних елементів вищих порядків. На думку Р. Галлагера, інтерполяційна процедура Тейлора: "…элегантный подход к построению специальных функций перемещений с помощью процедуры, включающей суперпозицию отдельных функций перемещений". При всіх перевагах традиційна процедура Тейлора генерує тільки стандартні інтерполяційні поліноми, які мають певні недоліки (надмірна жорсткість моделей; від'ємні значення навантажень у вузлах; лінійчастість поверхонь, що утворюють функції форми).

Аналіз основних досліджень та публікацій. Існування альтернативних інтерполяційних поліномів на серендипових скінченних елементах (ССЕ) вперше доведено за допомогою нових методів: ймовірнісно-геометричного [6,7,8] та геометричного [9]. Нові методи значно спрощують процедуру побудови базису (не виникає необхідності розв'язувати СЛАР відповідного порядку на елементі) і дозволяють отримати альтернативні моделі ССЕ, у яких відсутні недоліки, що притаманні стандартним моделям. Для розв'язання на ССЕ задачі інтерполювання з умовами [10] були запропоновані комбінований алгебро-геометричний метод [11] та аналітичний метод побудови ієрархічних форм базисних функцій [12].

Мета статті – запропонувати модифікацію традиційної процедури генерування базису за допомогою альтернативних функцій аналітичного методу побудови ієрархічних форм базисних функцій і побудувати нові моделі скінченних елементів змішаного типу.

Основна частина. Традиційна процедура систематичного генерування базису СЕ має два етапи [3,4,5]:

1. Побудова "проміжної" базисної функції за допомогою перемноження полінома Лагранжа відповідного степеня по одному із напрямів на лінійний поліном Лагранжа по іншому напряму.

2. Побудова "кутової" базисної функції за допомогою лінійної комбінації білінійної базисної функції $\overline{N_1}(\xi,\eta)=\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$ та "проміжних" функцій.

Розглянемо біквадратичний скінченний елемент серендипової сім'ї (ССЕ-8) у природній системі координат $\xi 0 \eta$ (рис. 1), який вперше у 1970 р. використав Джордан для дослідження двовимірних деформацій і напружень [13]. Ключові ідеї процедури Тейлора проілюструємо на прикладі побудови базису цього елементу [3,4,5] . Спочатку, помноживши відповідний поліном Лагранжа другого степеня $l_2(\xi)$: $l_2(\xi)=(1-\xi^2)$ на лінійний поліном Лагранжа $l_1(\eta)$: $l_1(\eta)=\frac{1}{2}(1-\eta)$, отримуємо базисну функцію для проміжного вузла 5:

$$N_5=\frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta). \tag{1}$$

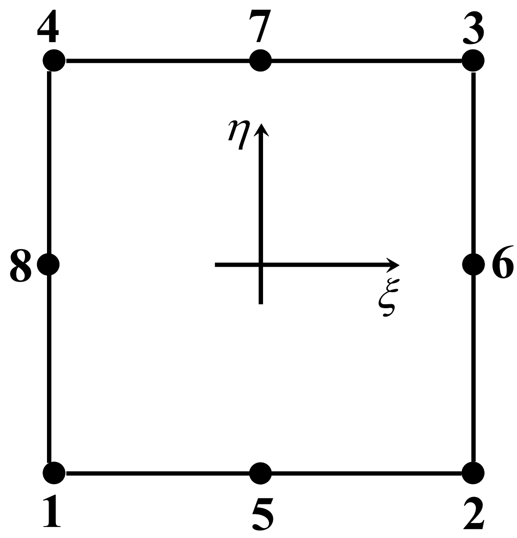


Рис. 1. Серендиповий СЕ- 8 ($|\xi| \le 1, |\eta| \le 1$)

Аналогічно будуємо базисну функцію для вузла 8:

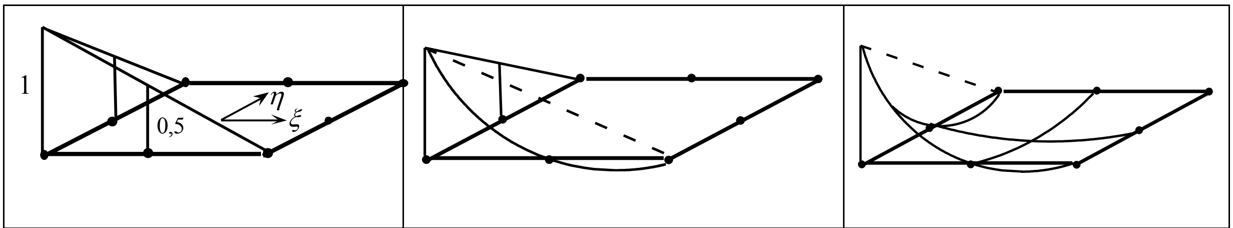
$$N_8 = \frac{1}{2}\left(1-\eta^2\right)\left(1-\xi\right). \tag{2}$$

Для "кутової" функції, наприклад, для N_1, скористаємося лінійною комбінацією відомої функції білінійної інтерполяції (рис. 2а)

$$\overline{N_1}(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \tag{3}$$

і "проміжних" функцій (1) і (2) (рис. 2б, 2в),

$$N_1(\xi,\eta) = \overline{N_1}(\xi,\eta) - \frac{1}{2}\left(N_5 + N_8\right). \tag{4}$$



а) $\overline{N_1} = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$	б) $\overline{N_1} - \frac{1}{2}N_5$	в) $\overline{N_1} - \frac{1}{2}N_5 - \frac{1}{2}N_8$

Рис. 2. Побудова базисної функції N_1 на ССЕ-8
за допомогою методу Тейлора

Після нескладних перетворень у формулі (4) отримуємо функцію стандартного базису ССЕ-8:

$$N_1(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-1-\xi-\eta). \tag{5}$$

Узагальнені формули стандартного базису ССЕ-8 мають вигляд [2,3,4]:

$$N_i(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)(\xi_i\xi+\eta_i\eta-1),$$
$$i = 1,2,3,4\,; \quad \xi_i, \eta_i = \pm 1. \tag{6}$$

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{2}\left(1 - \xi^2\right)\left(1 + \eta_i \eta\right), \quad i = 5{,}7\,; \;\; \eta_i = \pm 1\,. \tag{7}$$

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{2}\left(1 - \eta^2\right)\left(1 + \xi_i \xi\right), \quad i = 6,\, 8\,; \;\; \xi_i = \pm 1\,. \tag{8}$$

Розроблені спочатку серендипові елементи мали однакову кількість вузлів по різним координатним напрямам. Пізніше виникла задача: створити СЕ з різною кількістю вузлів на сторонах. Р. Галлагер називає такі моделі "елементи змішаного типу" [4]. Їх використання дозволяє узгоджувати елементи низького порядку в областях, де не передбачається різкої зміни характеристик, з елементами більш високого порядку в інших областях. Процедура конструювання "змішаних" СЕ описана у монографіях американських [14] та українсько-німецьких [15] дослідників, які працювали над проблемою чисельної реалізації МСЕ. У таблиці 1 автори [14,15] пропонують алгоритм, який дозволяє конструювати елементи, інтерполяційні функції яких будуть представлені поліномами, як однакового, так і різного степеня по кожній з координат. Зауважимо, що ключова ідея побудови "змішаних" серендипових елементів методом Тейлора реалізується у таблиці однією фразою: " за умови, що вузол i існує ".

Табл. 1.

Побудова функції форми *стандартного* інтерполяційного полінома ССЕ з кількістю вузлів від 4 до 8 *за умови, що вузол i існує* (рис. 2)				
	$i=5$	$i=6$	$i=7$	$i=8$
$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$	$-\frac{1}{2}N_5$			$-\frac{1}{2}N_8$
$N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$	$-\frac{1}{2}N_5$	$-\frac{1}{2}N_6$		
$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)$		$-\frac{1}{2}N_6$	$-\frac{1}{2}N_7$	
$N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$			$-\frac{1}{2}N_7$	$-\frac{1}{2}N_8$
$N_5 = \frac{1}{2}\left(1-\xi^2\right)(1-\eta)$				
$N_6 = \frac{1}{2}\left(1-\eta^2\right)(1+\xi)$				
$N_7 = \frac{1}{2}\left(1-\xi^2\right)(1+\eta)$				
$N_8 = \frac{1}{2}\left(1-\eta^2\right)(1-\xi)$				

Як відомо, базис біквадратичного СЕ має суттєвий недолік: наявність від'ємних значень у повузловому розподілі рівномірної масової сили. Цей недолік обумовлений саме використанням стандартних поліномів на ССЕ-8, бо для скінченного елемента вузлова доля рівномірної масової сили визначається як інтегральне середнє функції форми:

$$p_i = \iint_{\omega} \gamma N_i(\xi, \eta)\, d\xi d\eta\,, \quad \gamma = \frac{1}{4}\,. \tag{9}$$

При використанні стандартних інтерполяційних поліномів (6)-(8) на ССЕ уникнути цих недоліків і отримати додатний розподіл рівномірної масової сили неможливо. На цей факт звертає увагу один із засновників методу скінченних елементів О. Зенкевич у монографії [2].

Поставимо за мету модифікувати інтерполяційну процедуру Тейлора за допомогою функцій форми аналітичного методу [12], які для біквадратичного елемента мають вигляд:

$$N_i = \frac{1}{4}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)(-1+\xi_i\xi+\eta_i\eta+K(1-\xi_i\xi)(1-\eta_i\eta)),\quad i=1,2,3,4;\ \xi_i,\eta_i=\pm 1. \tag{10}$$

$$N_i = \frac{1}{2}(1-\xi)(1+\eta_i\eta)\left((1+\xi)-\frac{1}{2}K(1+\xi)(1-\eta_i\eta)\right),\quad i=5,7;\quad \eta_i=\pm 1. \tag{11}$$

$$N_i = \frac{1}{2}(1-\eta)(1+\xi_i\xi)\left((1+\eta)-\frac{1}{2}K(1+\eta)(1-\xi_i\xi)\right),\quad i=6,8;\quad \xi_i=\pm 1. \tag{12}$$

Отримані базисні функції відповідають всім властивостям, які притаманні функціям форми в МСЕ [2,10].

Використовуючи модифіковані функції форми аналітичного методу (10)-(12) можна генерувати безліч нових елементів з регулярним і нерегулярним розташуванням вузлів (табл. 2). Наявність керуючого параметра K дозволяє для кожної конкретної задачі обирати базис біквадратичного СЕ, який найкращим чином буде відповідати умовам задачі, що розв'язується.

Табл. 2.

Побудова функції форми *модифікованого* інтерполяційного полінома ССЕ з кількістю вузлів від 4 до 8 *за умови, що вузол* i *існує* (рис. 2)					
		$i=5$	$i=6$	$i=7$	$i=8$
$N_1=$	$\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$	$-\frac{1}{2}N_5$			$-\frac{1}{2}N_8$
$N_2=$	$\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$	$-\frac{1}{2}N_5$	$-\frac{1}{2}N_6$		
$N_3=$	$\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)$		$-\frac{1}{2}N_6$	$-\frac{1}{2}N_7$	
$N_4=$	$\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$			$-\frac{1}{2}N_7$	$-\frac{1}{2}N_8$
$N_5=$	$\frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)\left(1-\frac{K}{2}(1+\eta)\right)$				
$N_6=$	$\frac{1}{2}(1-\eta^2)(1+\xi)\left(1-\frac{K}{2}(1-\xi)\right)$				
$N_7=$	$\frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta)\left(1-\frac{K}{2}(1-\eta)\right)$				
$N_8=$	$\frac{1}{2}(1-\eta^2)(1-\xi)\left(1-\frac{K}{2}(1+\xi)\right)$				

Кількість вузлів на границі скінченного елемента може змінюватись від 4 до 8. На рис. 3-8 показані можливі варіанти розташування вузлів СЕ.

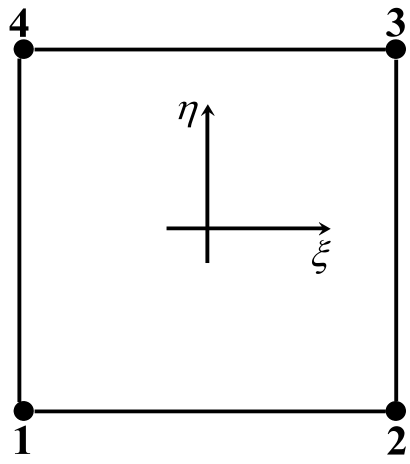


Рис. 3. СЕ (4 вузла)

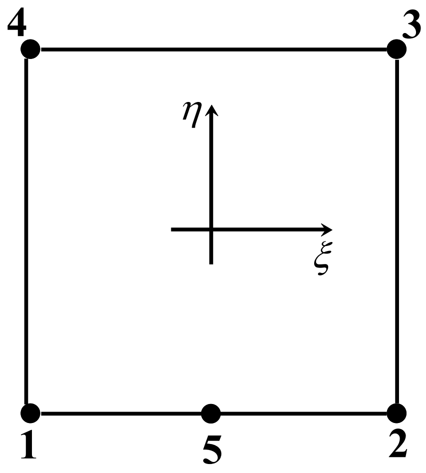


Рис. 4. СЕ (5 вузлів)

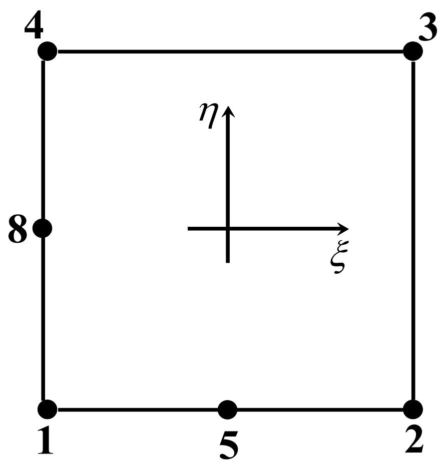


Рис. 5. СЕ (6 вузлів)

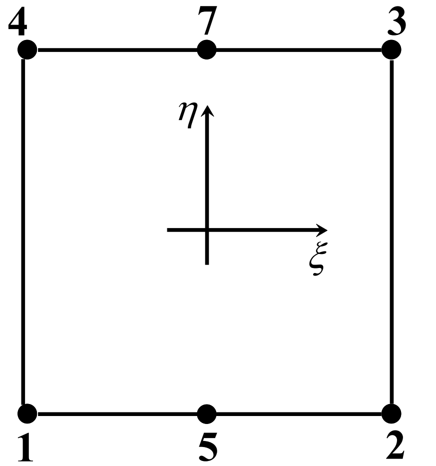


Рис. 6. СЕ (6 вузлів)

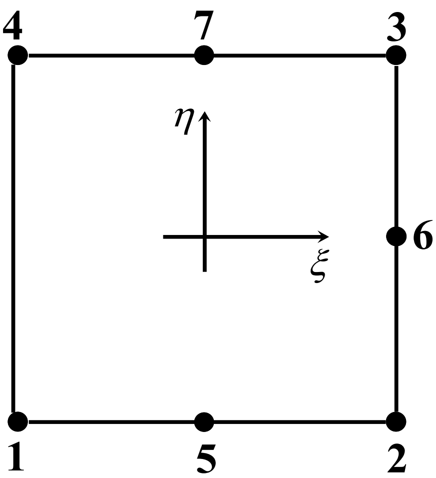


Рис. 7. СЕ (7 вузлів)

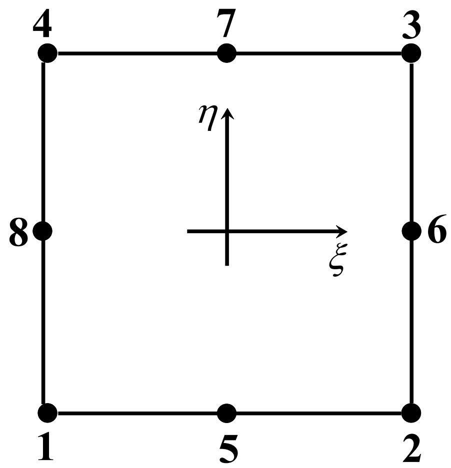


Рис. 8. СЕ (8 вузлів)

На рис. 9-11 наведена візуалізація функцій форми "*змішаного*" скінченного елемента з лінійно-квадратичною інтерполяцією (формули (13)-(18)), який зображено на рис. 5 [16,17] .

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-1-\xi-\eta+K(1+\xi)(1+\eta)), \tag{13}$$

$$N_2 = \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)((2\xi)+K(1-\xi)(1+\eta)), \tag{14}$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta), \tag{15}$$

$$N_4 = \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)((2\eta)+K(1+\xi)(1-\eta)), \tag{16}$$

$$N_5 = \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta)\left((1+\xi)-\frac{1}{2}K(1+\xi)(1+\eta)\right), \tag{17}$$

$$N_8 = \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta)\left((1+\eta)-\frac{1}{2}K(1+\xi)(1+\eta)\right), \tag{18}$$

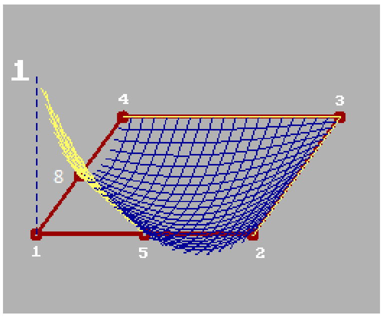


Рис. 9. Графік N_1 $(K=0)$

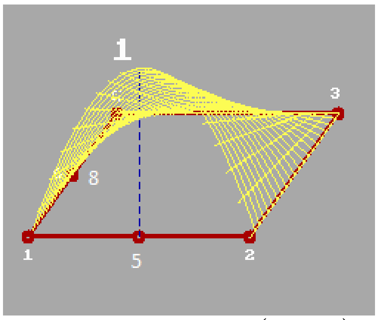


Рис. 10. Графік N_5 $(K=0)$

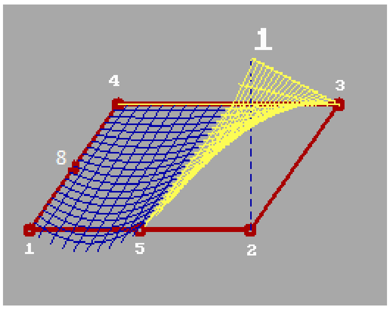


Рис. 11. Графік N_3 $(K=0)$

Вузли не обов'язково повинні розташовуватися на середині сторони скінченного елемента, але включення таких вузлів до елементу потребує перебудови проміжної базисної функції. Розташування "несерединних" вузлів на стороні СЕ має певні обмеження.

Велике значення при чисельній реалізації МСЕ має отримання функцій форми різних СЕ за допомогою принципу "виродження" [14,15], який полягає у злитті декількох вузлів в один вузол. При цьому елемент змінює геометричну форму. Наприклад, на площині квадрат перетворюється у трикутник. Трикутний елемент з постійною деформацією (рис. 13) можливо отримати з чотирикутного білінійного елемента (рис. 12) за допомогою простого суміщення вузлів 1 і 4. Для лінійного трикутного елемента (рис. 13) отримаємо наступні функції форми Q_{i^*} [15]:

$$Q_{1^*} = N_2, \quad Q_{2^*} = N_3, \quad Q_{3^*} = N_1 + N_4, \text{ причому } Q_{i^*} = L_{i^*}, \tag{19}$$

де $N_i = \dfrac{1}{4}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)$ $\left(i=\overline{1,4}\right)$ - функції форми білінійного СЕ (рис. 12),

L_{i^*} - барицентричні координати трикутника $\left(i^*=\overline{1,3}\right)$, $L_{1^*}+L_{2^*}+L_{3^*}=1$ (рис. 13).

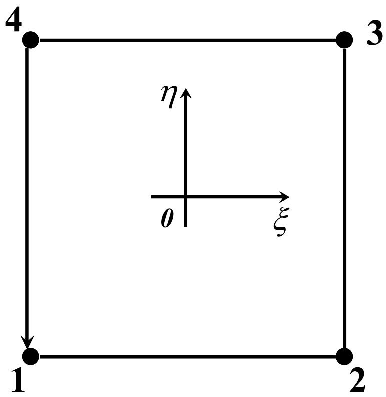


Рис. 12. ССЕ-4

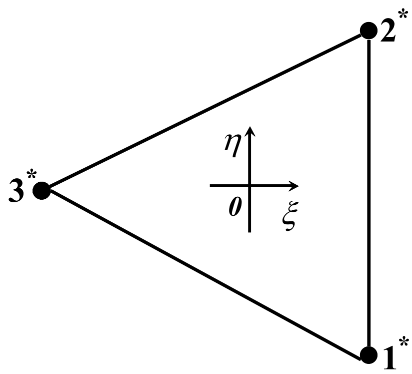


Рис. 13. Трикутний СЕ з лінійною інтерполяцією

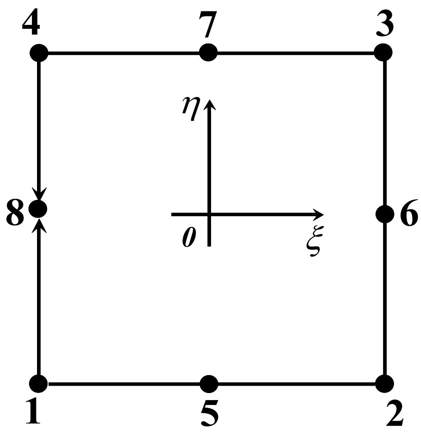


Рис. 14. ССЕ-8

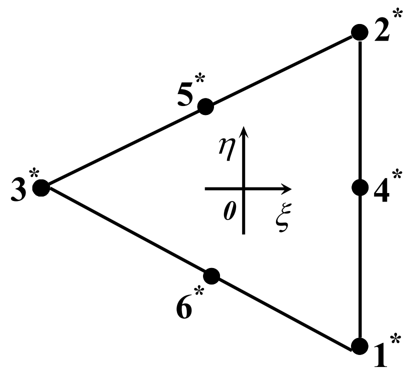


Рис. 15. Трикутний СЕ
з квадратичною інтерполяцією

На рис. 15 показано трикутник з квадратичною інтерполяцією, який отримано при злитті вузлів 1, 4 і 8 на біквадратичному ССЕ (рис. 14).

Зауваження. Використані на рис. 13 і 15 системи нумерації вузлів викликані необхідністю збереження єдиної природньої системи координат для квадратного і трикутного елементів.

Для квадратичного трикутного елемента (рис. 15) функції форми записуються наступним чином:

$$\begin{aligned} &Q_{1^*} = N_2 + \Delta N, &\quad &Q_{4^*} = N_6 - 2\Delta N, \\ &Q_{2^*} = N_3 + \Delta N, &\quad &Q_{5^*} = N_7, \\ &Q_{3^*} = N_1 + N_4 + N_8, &\quad &Q_{6^*} = N_5, \end{aligned} \tag{20}$$

де $\Delta N = \dfrac{1}{8}\left(1-\xi^2\right)\left(1-\eta^2\right)$ - коригуюча функція [15],

$N_i \ \left(i = \overline{1,8}\right)$ - функції форми ССЕ-8 (формули (10)-(12) при $K = 0$).

Автори [14,15] зауважують, що треба слідкувати, щоб нові функції форми трикутного СЕ були геометрично ізотропними і зберігалась C^0 - гладкість апроксимації. Це досягається коригуванням функцій форми біквадратичного СЕ для вузлів 2,3,6 доданком ΔN (рис. 15).

Перевірка показує, що для трикутного елемента з квадратичною інтерполяцією (рис. 15) маємо:

$$\begin{aligned} &Q_{1^*} = L_{1^*}\left(2L_{1^*} - 1\right), &\quad &Q_{4^*} = 4\, L_{1^*} L_{2^*}, \\ &Q_{2^*} = L_{2^*}\left(2L_{2^*} - 1\right), &\quad &Q_{5^*} = 4\, L_{2^*} L_{3^*}, \\ &Q_{3^*} = L_{3^*}\left(2L_{3^*} - 1\right), &\quad &Q_{6^*} = 4\, L_{1^*} L_{3^*}, \end{aligned} \tag{21}$$

де - $L_{1^*}, L_{2^*}, L_{3^*}$ - барицентричні координати трикутника, $L_{1^*} + L_{2^*} + L_{3^*} = 1$.

Перетворення координат ξ і η до трикутних координат наведено у формулах (22) (рис. 16).

$$\begin{aligned} &L_{1^*} = \frac{1}{4}\left(1+\xi\right)\left(1-\eta\right), &\quad &\xi = 1 - 2L_{3^*}, \\ &L_{2^*} = \frac{1}{4}\left(1+\xi\right)\left(1+\eta\right), &\quad &\eta = \frac{L_{2^*} - L_{1^*}}{L_{1^*} + L_{2^*}}, \\ &L_{3^*} = \frac{1}{2}\left(1-\xi\right), &\quad &L_{1^*} + L_{2^*} + L_{3^*} = 1. \end{aligned} \tag{22}$$

Таким чином, завдяки принципу "виродження", від застосування спеціальних співвідношень у трикутних координатах можливо відмовитись і при розв'язанні двовимірних задач теорії пружності використовувати формули (19) або (20) [15].

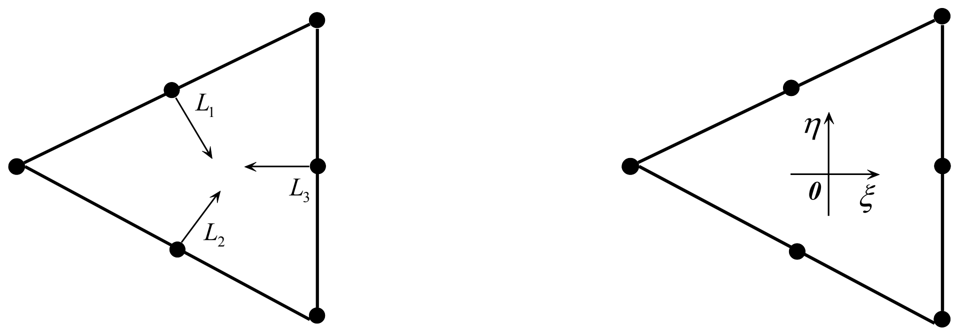


Рис. 16. Перетворення координат

Висновки та перспективи подальших досліджень. У роботі запропоновані нові “змішані” елементи, які отримані за допомогою використання модифікованого методу Тейлора на біквадратичному скінченному елементі серендипової сім’ї. Цікавим є поширення запропонованих процедур для конструювання просторових СЕ.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Ergatoudis I. Curved isoperimetric “quadrilateral” elements for finite element analysis / I. Ergatoudis, B.M. Irons, O.C. Zienkiewicz // Internat. J. Solids Struct., —№ 4. —1968. — P. 31-42.
2. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. — М.: Мир, 1975. — 541 с.
3. Зенкевич О. Конечные элементы и аппроксимация / О.Зенкевич, К. Морган.— М.: Мир, 1986. — 318 с.
4. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы / Р. Галлагер. — М.: Мир, 1984. — 428 с.
5. Taylor R.L. On the completeness of shape functions for finite element analysis /R.L. Taylor // J. Num. Meth. Eng. — V.4. — № 1. — 1972. — P. 17-22.
6. Хомченко А.Н. Метод конечных элементов: стохастический подход / А.Н. Хомченко. — Ивано-Франк. ин-т нефти и газа. — Ивано-Франковск, 1982. — 7 с. — Деп. в ВИНИТИ 15.10.82, №5167.
7. Хомченко А.Н. Некоторые вероятностные аспекты МКЭ /А.Н.Хомченко. — Ивано-Франк. ин-т нефти и газа. — Ивано-Франковск, 1982. — 9 с. — Деп. в ВИНИТИ 18.03.82, № 1213.
8. Хомченко А.Н. О вероятностном построении базисных функций МКЭ / А.Н.Хомченко. — Ивано-Франк. ин-т нефти и газа. — Ивано-Франковск, 1982. — 5 с. — Деп. в ВИНИТИ 21.10.82, №5264.
9. Хомченко А.Н. Геометрия серендиповых аппроксимаций / А.Н. Хомченко, Е.И. Литвиненко, П.И. Гучек // Прикл. геом. и инж. графика. — К. : Будівельник, 1996. — Вып. 59. — С. 40-42.
10. Попов Б.А. Приближение функций для технических приложений / Б.А. Попов, Г.С.Теслер. — Киев: Наукова думка, 1980. — 352 с.
11. Астионенко И.А. О серендиповых элементах с естественным спектром узловых нагрузок /И.А. Астионенко, Е.И. Литвиненко, А.Н. Хомченко // Геом. та комп'ютерне моделювання. Зб. наук. пр. — Вип. 17. — Харків: ХДУХТ, 2007. — С. 97-102.
12. Хомченко А.Н. Новый подход к построению базисов серендиповых элементов /А.Н. Хомченко, Е.И. Литвиненко, И.А.Астионенко // Геом. та комп. моделювання. Зб. наук. праць. — Вип. 23. — Харків: ХДУХТ, 2009. — С.90-95.
13. Митчелл Э. Метод конечных элементов для уравнений с частными производными / Э. Митчелл, Р. Уэйт. — М.: Мир, 1981.— 216 с.
14. Бате К. Численные методы анализа и метод конечных элементов./ К. Бате, Е. Вильсон. — М.: Стройиздат, 1982.— 448 с.
15. Сахаров А.С. Метод конечных элементов в механике твердых тел. / Под. общей редакцией А.С. Сахарова, И. Альтенбаха. — К.: Вища школа, 1982.— 480 с.
16. Литвиненко Е.И. Математические модели и алгоритмы компьютерной диагностики физических полей: дисс. кандидата техн.н.: 05.13.06 / Елена Ивановна Литвиненко — Херсон, 1999. — 172 с.
17. Астіоненко І.О. Багатопараметричні серендипові елементи змішаного типу // Вестник Херсонского нац. техн. университета. Выпуск 2 (45). – Херсон: ХНТУ, 2012. – С. 30-34.

ЛИТВИНЕНКО Олена Іванівна – к.т.н., докторант кафедри вищої математики та математичного моделювання Херсонського національного технічного університету.

Наукові інтереси:

математичне моделювання та інформаційні технології в природничих і технічних науках, методи і моделі відновлення функцій, принцип барицентричного усереднення.