УДК 517.952

О. О. Мякинник, В. В. Феоктистов

ПРИЛОЖЕНИЕ МОДЕЛИ ВОЛНОВОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

Рассматривается система линейных дифференциальных уравнений в частных производных 1-го порядка

$$\sum_{k=1}^{s+1} A_k \frac{\partial \vec{u}(x)}{\partial x_k} = C\vec{u}(x), \qquad x = (x_1, ..., x_s, x_{s+1}), \tag{1}$$

где $\vec{u}(x)$ — неизвестная n-мерная вектор-функция, коэффициенты C и A_k — числовые квадратные матрицы порядка n, которые однозначно определяют систему (1), и позволяют получить основные сведения о свойствах ее решений [1]. В работах [1],[2],[3] система (1) рассматривается как универсальная матричная форма линейных дифференциальных уравнений, которая описывает широкий класс физических моделей [3].

Пусть матрица C нулевая, а среди матриц A_k, $k=\overline{1,s+1}$, существует хотя бы одна невырожденная. Предположив, что $\det A_{s+1} \neq 0$, обозначим $x_{s+1} = t$. Тогда система (1) принимает вид

$$I\frac{\partial \vec{u}(t,x)}{\partial t} = A\vec{u}(t,x), \quad A \equiv \sum_{k=1}^{s} A_k \frac{\partial}{\partial x_k}, \qquad x = (x_1, \ldots x_s), \tag{2}$$

где I — единичная матрица. Система (2) разрешена относительно производной по t, представляет собой нормальную форму системы линейных однородных уравнений в частных производных 1-го порядка и является системой Ковалевской. Для системы (2) в работах [4]–[5] построена модель волнового взаимодействия, в рамках которой решение задачи Коши представлено как разложение в ряд по взаимодействующим бегущим волнам, заданным матричными коэффициентами системы.

Для изучения возможности решения краевой задачи требуется рассмотрение конкретной физической модели. Целью настоящей статьи является приложение полученных результатов к решению задач для уравнений математической физики, описываемых однородной системой вида (1), когда матрица C нулевая, а все матрицы A_k, $k=\overline{1,s}$, являются вырожденными.

Рассмотрим смешанную задачу для системы уравнений Максвелла. Запишем однородные уравнения Максвелла (без зарядов и токов), ограничившись случаем, когда относительная диэлектрическая проницаемость и относительная магнитная проницаемость являются постоянными ($\varepsilon(x) = \mu(x) \equiv const = 1$):

$$\partial \vec{E}(t,x)/\partial t = \mathrm{rot}\,\vec{H}(t,x) \qquad\qquad \mathrm{div}\,\vec{H}(t,x) = 0 \tag{3}$$

$$\partial \vec{H}(t,x)/\partial t = -\mathrm{rot}\,\vec{E}(t,x) \qquad\qquad \mathrm{div}\,\vec{E}(t,x) = 0. \tag{4}$$

Здесь $\vec{E}(t,x)$ и $\vec{H}(t,x)$ — векторы напряженности электрического и магнитного полей, которые являются функциями точки x, $x \in R^3$, и времени t, $t \in [0,T]$. Рассмотрим для системы (3)–(4) смешанную задачу, поставленную при начальных условиях

$$\vec{E}(t,x)\Big|_{t=0} = \vec{\varphi}_E(x), \quad \vec{H}(t,x)\Big|_{t=0} = \vec{\varphi}_H(x), \quad (\vec{\varphi}_E(x), \vec{\varphi}_H(x))^{\top} = \vec{\varphi}(x), \tag{5}$$

где функции $\vec{\varphi}_E(x)$ и $\vec{\varphi}_H(x)$ являются аналитическими в окрестности точки x_0, принадлежащей области Ω, $\Omega \subset R^3$, ограниченной достаточно гладкой поверхностью S. Пусть поверхность идеально-проводящая. Краевое условие налагается на касательную составляющую вектора $\vec{E}(t,x)$ по поверхности S:

$$\vec{E}_{\tau}(t,x)\Big|_S = 0. \tag{6}$$

Линейные дифференциальные операторы вида A, отвечающие правой части системы (2), характерны для моделей математической физики. Если, например, при построении дифференциальных уравнений 1-го порядка (уравнений механики сплошной среды, газовой динамики, электродинамики) используются дифференциальные операторы векторного анализа grad , rot , div , то к искомой вектор-функции применяется оператор A .

Пусть $A = \mathrm{rot}$. Тогда в записи (2) оператору A соответствуют три вырожденные антисимметричные некоммутативные относительно умножения матрицы

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Следуя построениям, выполненным в [4]–[5], рассмотрим решение системы (2), где $s = 3$, $A = \mathrm{rot}$, в виде

$$X_k \equiv (Ix_k + A_k \cdot t), \qquad k = \overline{1,s}. \tag{8}$$

По аналогии со скалярным случаем выражения (8) рассматриваются как элементарные n-мерные бегущие волны (или бегущие волны с матричными коэффициентами). Волны (8) распространяются в направлении соответствующих координатных осей OX_k и находятся во взаимодействии, которое описывается оператором W_p^α размерности p порядка $\| \alpha \|$ [4]–[5] :

$$W_p^\alpha \equiv W(X_1^{\alpha_1}, X_2^{\alpha_2}, \ldots, X_p^{\alpha_p}), \tag{9}$$

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p), \quad \| \alpha \| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_p, \quad p = \overline{1,s}.$$

Нижний индекс p задает число волн-аргументов оператора, мультииндекс α размерности p определяет порядок вхождения каждой из p волн. Если явно указаны аргументы оператора и их порядок, то индексы при W опускаем. Оператор (9) задан следующими свойствами:

$$W_p^{(0,..,\alpha_k,..,0)} = W(X_k^{\alpha_k}) = X_k^{\alpha_k}, \quad W_p^{(0,..,0)} = I, \quad k = \overline{1,p}, \tag{10}$$

$$W_p^{(1,..,1)} = \sum_{k=1}^{p} X_k W(X_1, \ldots, X_{k-1}, X_{k+1}, \ldots, X_p), \tag{11}$$

$$W_p^\alpha = \sum_{k=1}^{p} X_k W(X_1^{\alpha_1}, \ldots, X_k^{(\alpha_k - 1)}, \ldots, X_p^{\alpha_p}). \tag{12}$$

В результате действия оператора волнового взаимодействия W_p^α получим сумму всех возможных произведений его некоммутирующих волн-аргументов. В качестве примера рассмотрим действие оператора по трехмерному мультииндексу $(2,0,1)$:

$$W_3^{(2,0,1)} = X_1 W_3^{(1,0,1)} + X_3 W_3^{(2,0,0)} = X_1^2 X_3 + X_1 X_3 X_1 + X_3 X_1^2.$$

Для оператора волнового взаимодействия установлены правила дифференцирования [4]–[5]:

$$\frac{\partial}{\partial X_k} W_p^\alpha = \| \alpha \| W_p^{(\alpha_1,..,\alpha_k - 1,..,\alpha_k)}, \qquad \frac{\partial}{\partial t} W_p^\alpha = \| \alpha \| \sum_{k=1}^{p} A_k W_p^{(\alpha_1,..,\alpha_k - 1,..,\alpha_p)}. \tag{13}$$

Для вычисления производной по t существенным является перестановочное свойство коммутатора, который рассматривается на элементах произвольной последовательности числовых квадратных матриц $(A_1, \ldots, A_p)$ и соответствующей ей последовательности бегущих волн вида (8):

$$\left[A_i, X_j \right] = \left[X_i, A_j \right], \quad i,j = \overline{1,p}, \qquad \left[A_i, X_j \right] = A_i X_j - X_j A_i, \quad X_i = (Ix_i + A_i \cdot t). \tag{14}$$

Свойство (14) используется при выполнении операций с некоммутативными относительно умножения матрицами и позволяет в (13) вынести матрицу A_k знак оператора волнового взаимодействия [5].

Пользуясь правилами (13), легко убедиться, что результат действия $W_3^{(2,0,1)}$ на волны (8), заданные матрицами (7), является решением системы (2), заданной этими же матрицами. Доказано [4], что система (2) имеет решение

$$\vec{u}(t,x)=\sum_{\alpha,\|\alpha\|=0}^{\infty} W_s^{\alpha}\cdot\vec{\gamma}_{\alpha}\equiv\sum_{\alpha,\|\alpha\|=0}^{\infty} W\left(X_1^{\alpha_1},X_2^{\alpha_2},\dots,X_s^{\alpha_s}\right)\cdot\vec{\gamma}_{\alpha},\quad X_k=(Ix_k+t\cdot A_k),k=\overline{1,s},\tag{15}$$

где $\vec{\gamma}_{\alpha}$ — неопределенный n-мерный числовой вектор-коэффициент. По отношению к оператору rot полученные результаты означают, что при любом трехмерном мультииндексе α взаимодействие W_3^{α} волн (8), порождаемых оператором rot в трехмерной среде, а также любая линейная комбинация этих взаимодействий, включая ряд (15) при $s=3$, являются решениями нормальной системы (2), построенной для этого оператора посредством матриц (7).

Далее, если начальное условие для системы (2) задано n-мерной функцией $\vec{\varphi}(x)$, аналитической по всем своим s аргументам в окрестности точки x_0, то для решения задачи Коши следует выбрать коэффициенты ряда (15) в виде

$$\vec{\gamma}_{\alpha}=\frac{1}{\|\alpha\|!}\cdot\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\dots\partial x_s^{\alpha_s}}\vec{\varphi}(x)\Bigg|_{x=x_0}\equiv\frac{1}{\|\alpha\|!}\cdot\partial_{\alpha}\,\vec{\varphi}(x)\Big|_{x=x_0}\tag{16}$$

Ряд (15) с коэффициентами (16) является сходящимся в некоторой окрестности точки x_0 и представляет собой иную организацию ряда, фигурирующего в теореме Коши-Ковалевской. Найденное решение позволяет рассмотреть формальное действие операторной экспоненты $\exp(At)$ на аналитическую функцию $\vec{\varphi}(x)$ как разложение в ряд по взаимодействующим бегущим волнам (8), которые, как и дифференциальный оператор A, заданы матричными коэффициентами системы (2) [4]–[5].

Наличие среди коэффициентов системы (1) обратимой матрицы является существенным ограничением. Например, включение в математическую модель уравнений неразрывности или требование соленоидальности искомого вектора не позволяет записать универсальную линейную систему (1) в нормальной форме (2).

Однако, в некоторых специальных случаях можно использовать модель волнового взаимодействия и для решения (10). В [6] С. Л. Соболев построил в гильбертовом пространстве систему

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}=[\vec{v}\times\vec{k}]-\operatorname{grad}\,p\tag{17}$$

$$0=\operatorname{div}\vec{v},\tag{18}$$

($\vec{k}$ — единичный орт). Система (17)–(18) сконструирована так, что ее составляющие $\operatorname{grad}\,p$ и $\vec{v}$ представляют собой потенциальный и соленоидальный векторы и принадлежат к взаимно ортогональным подпространствам основного гильбертового пространства, элементами которого являются искомые функции $\vec{v}$ и p. Показано, что для системы (17)–(18), не являющейся системой Ковалевской, для значений переменной t, $t\in[0,T]$, можно поставить задачу Коши и смешанную задачу в произвольной области Ω, $\Omega\subset R^3$, ограниченной гладкой поверхностью S. Условие, накладываемое на искомую функцию на границе области S (либо на ее касательную или нормальную по отношению к S составляющие), может входить в определение одного из ортогональных подпространств.

Решение смешанной задачи представлено в [6] как разложение в степенной ряд операторной экспоненты

$$\exp(P[\vec{v}\times\vec{k}]\cdot t)\overrightarrow{v_0}(x),$$

где $\overrightarrow{v_0}(x)$ — начальная функция, P — оператор проектирования на подпространство соленоидальных векторов, в котором также выполняется условие на границе области. Такое построение решения позволяет для решения задачи (3)–(6) использовать в явном виде результаты, полученные авторами в рамках модели волнового взаимодействия [4]–[5].

Пусть $L_2(\Omega)$, как обычно, гильбертово пространство вектор-функций, заданных в области Ω трехмерного евклидового пространства и интегрируемых с квадратом. Имеет место ортогональное разложение пространства $L_2(\Omega)$ [7], называемое также разложением Вейля:

$$L_2(\Omega) = \dot{\Re}(\mathrm{grad}) \oplus U \oplus \dot{\Re}(\mathrm{rot}) = \Re(\mathrm{grad}) \oplus \dot{\Re}(\mathrm{rot}) = \dot{\Re}(\mathrm{grad}) \oplus \Re(\mathrm{rot}), \tag{19}$$

где $\Re(\cdot)$ — область значений, заключенного в скобки оператора, точка над знаком $\Re$ означает, что функции из области определения оператора подчинены нулевым условиям на границе области Ω, U — замыкание множества градиентов гармонических функций.

В [8] выполнено описание линейных расширений $\tilde{L}$ дифференциального оператора L, заключенных между L и сопряженным с ним оператором $L^{(*)}$, в связи с отысканием корректных (в некотором смысле) краевых условий. В [9] эта теория применена к оператору rot. В соответствии с (6) рассмотрим rot на гладких функциях с нулевой касательной компонентой на поверхности S. В нашем случае $L = \mathrm{rot}$, $L^{(*)} = -\mathrm{rot}$, соответствующее задаче расширение $\tilde{L}$ равно rot ($L \subseteq \tilde{L} \subset L^{(*)}$). Тогда, согласно [9],[10], краевому условию (6) для системы уравнений Максвелла (3)–(4), рассматриваемой в цилиндре $L_2(\Omega)\times[0,T]$, соответствует дифференциальный оператор M:

$$M = \begin{pmatrix} \vec{E} \in \Re(\mathrm{rot}) \bigcap \left\{ \vec{u} : \vec{u} \in W_2^1(\Omega), \vec{u}_\tau\big|_S = 0 \right\} \\ \vec{H} \in \dot{\Re}(\mathrm{rot}) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \Re(\mathrm{rot}) \\ \dot{\Re}(\mathrm{rot}) \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Подход Соболева-Вейля позволяет рассмотреть оператор M, действующий на шестимерный вектор $(\vec{E},\vec{H})^\top$, в качестве оператора A для системы (2) при $n = 6$, $s = 3$:

$$A \equiv \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{rot} \\ -\mathrm{rot} & 0 \end{pmatrix}, \qquad A = \sum_{k=1}^{3} A_k \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad n = 6. \tag{21}$$

В (21) матрицы A_k, $k = \overline{1,3}$, представляют собой матричные блоки порядка 6, где в правом верхнем углу в виде трехмерного блока находится соответствующая трехмерная матрица (7), а в левом нижнем — такая же матрица, взятая со знаком минус.

Из сказанного вытекает, что для удовлетворения условия (4) соленоидальности искомого вектора и условия (6) на границе S, следует выполнить проектирование решения задачи Коши для векторных уравнений Максвелла (3) с начальным условием (5), на подпространства Вейля:

$$\vec{u}(t,x) = (\vec{E}(t,x),\vec{H}(t,x))^\top = P(\exp(At)\vec{\varphi}(x)), \qquad P = \begin{pmatrix} P_{\Re(\mathrm{rot})} & 0 \\ 0 & P_{\dot{\Re}(\mathrm{rot})} \end{pmatrix}, \tag{22}$$

где операторы $P_{\Re(\mathrm{rot})}$ и $P_{\dot{\Re}(\mathrm{rot})}$ выполняют проектирование трехмерного вектора на подпространства, отвечающие нижним индексам.

Представим выражение $\exp(At)\vec{\varphi}(x)$ в виде ряда (15) при $n = 6$ и $s = 3$ с коэффициентами (16) для $\vec{\varphi}(x) = (\vec{\varphi}_E(x),\vec{\varphi}_H(x))^\top$. Тогда, в рамках модели волнового взаимодействия решение начально-краевой задачи (3)–(6) имеет вид

$$\vec{E}(t,x) = \begin{pmatrix} P_{\Re(\mathrm{rot})} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sum_{\alpha,\|\alpha\|=0}^{\infty} \frac{1}{\|\alpha\|!} W_3^\alpha \cdot \partial_\alpha \begin{pmatrix} \vec{\varphi}_E(x) \\ \vec{\varphi}_H(x) \end{pmatrix}\Bigg|_{x=x_0} \tag{23}$$

$$\vec{H}(t,x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & P_{\dot{\Re}(\mathrm{rot})} \end{pmatrix} \sum_{\alpha,\|\alpha\|=0}^{\infty} \frac{1}{\|\alpha\|!} W_3^\alpha \cdot \partial_\alpha \begin{pmatrix} \vec{\varphi}_E(x) \\ \vec{\varphi}_H(x) \end{pmatrix}\Bigg|_{x=x_0}, \tag{24}$$

где W_3^α — операторы волнового взаимодействия размерности 3, аргументами которых являются 6-и мерные бегущие волны, построенные из матриц A_k, задающих нормальную линейную однородную систему уравнений в частных производных (3).

ЛИТЕРАТУРА:

1. Федоров Ф. И. Уравнения первого порядка для гравитационного поля / Ф. И. Федоров // ДАН СССР. — 1968. — Т. 179. — 4. — С. 802–805.

2. Скоробогатько В. Я. Решение системы дифференциальных уравнений матричным методом / В. Я. Скоробогатько // ДАН УССР. — 1988. — 3. — С. 28–31.
3. Geroch R. P. Partial Differential Equations of Physics / R. P. Geroch // General Relativity. — Scotish Universities Summer School in Physics. — 1996. — 57 p.
4. Феоктистов В. В., Мякинник О. О. Структура ряда для решения системы уравнений с частными производными 1-го порядка / В. В. Феоктистов, О.О.Мякинник // Вестник МГТУ. Серия "Естественные науки". — 2009. — 4 . — С. 3–22.
5. Феоктистов В. В., Мякинник О. О. Оператор волнового взаимодействия и нормальная форма системы линейных уравнений в частных производных 1-го порядка / В. В. Феоктистов, О.О.Мякинник // Современные методы теории краевых задач: материалы Воронежской весенней математической школы "Понтрягинские чтения - XXI". — Воронеж, 2010. — С. 232–233.
6. Соболев С. Л. Об одной новой задаче для системы уравнений в частных производных / С. Л. Соболев // ДАН СССР. — 1951. — 81, Т. 6. — С. 1007–1009.
7. Вейль Г. Метод ортогональной проекции в теории потенциала / Г. Вейль // Герман Вейль. Избранные труды. Математика. Теоретическая физика. — М.: Наука, 1984.— С. 275–308.
8. Вишик М. И. Линейные расширения операторов и краевые условия / М. И. Вишик // ДАН СССР. — 1949. — Т. LXV. — 4. — С. 433–436.
9. Сливняк М. И. О краевых задачах для уравнений Максвелла / М. И. Сливняк // Математический сборник. — 1954. — Т. 35(77). — 3. — С. 369–394.
10. Быховский Э. Б. Решение смешанной задачи для системы уравнений Максвелла в случае идеально-проводящей границы / Э. Б. Быховский // Вестник Ленинградского университета. — 1957. — 59. — С. 50–66.

ФЕОКТИСТОВ Владимир Васильевич — д.т.н., профессор кафедры "Математическое моделирование" МГТУ им. Н .Э. Баумана, г.Москва, лауреат премии РАН по математике и механике.

Научные интересы:

– математические модели аэродинамики и газовой динамики, дифференциальные уравнения с особыми иррегулярными точками.

МЯКИННИК Ольга Олеговна — соискатель кафедры "Математическое моделирование" МГТУ им. Н .Э. Баумана, г.Москва.

Научные интересы:

– математические модели гидродинамики, нелинейные уравнения математической физики.