УДК 515.2:519.6

Ю.И. Николаенко, С.В. Моисеенко

ПОЛНЫЕ ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ БАЗИСЫ ГЕКСАГОНА

Постановка проблемы. Развитие вычислительной техники обусловило широкое внедрение в расчетную практику численных методов. В настоящее время одним из наиболее универсальных методов решения прикладных задач математической физики, успешно используемых для математического моделирования в области прочности, аэрогидродинамики, теплофизики, признается метод конечных элементов(МКЭ).Первым и вероятно наиболее ответственным шагом построения конкретных методик решения задач на основе МКЭ является выбор базисных функций используемых конечных элементов (КЭ).

Очевидно, что для получения качественного решения такие функции $N_i(x,y)$должны удовлетворять определенным требованиям, обеспечивающим сходимость КЭ решений [1-4], а именно:

1. $N_i(M_k)=\delta_{ik}$, где M_k — узлы многоугольника, δ_{ik} - символ Кронекера. (1)

2. Условие нормировки: сума всех базисных функций на КЭ равна 1. (2)

Кроме того важным требованием является линейная независимость базисных функций. Дополнительным условием, которому должен подчиняться выбор или построение базисных функций, является свойство полноты[9]. Базис называется полным, если базисные функции могут точно аппроксимировать линейную функцию.

3. Условие полноты базиса по отношению к линейным функциям представлено в следующей системе:

$$\begin{cases} \sum\limits_i x_i N_i(x,y) = x; \\ \sum\limits_i y_i N_i(x,y) = y, \end{cases} \tag{3}$$

где x_i, y_i – значение абсцисс и ординат i-го граничного узла многоугольника.

С учетом этих особенностей стандартная аппроксимация функции в МКЭ может быть записана в виде:

$$u(x,y) = \sum_{i=1}^{n} u_i N_i(x,y),$$

где n – количество узлов на КЭ, u_i - значение функции в узловых точках КЭ, $N_i(x,y)$ - базисные функции (БФ).

Литература, посвященная теории и реализации МКЭ, довольно обширна. Однако анализ современных научных публикаций, посвященных вопросам исследования методов построения функций формы КЭ, позволяет заключить, что одной из наиболее сложных проблем в МКЭ является использование высокоточных КЭ в расчетах и оснащение этих КЭ подходящим интерполяционным базисом. Анализ работ показывает, что к настоящему времени для расчета инженерных конструкций на основе МКЭ используется весьма широкий набор типов КЭ с различным количеством узловых варьируемых параметров и видом аппроксимирующих функций, однако наиболее разработана на данный момент техника треугольных и прямоугольных (квадратных) элементов [2,3]. В то же время ряд исследований [4] указывает на эффективность использования в расчетах гексагональных конечных элементов. Именно поэтому возникает проблема построения на гексагоне БФ и исследования их свойств.

Анализ публикаций по теме исследования.Обычно в качестве базисных функций в МКЭ используются степенные полиномы. С учетом перечисленных требований в настоящее время предложено три способа построения базиса КЭ: алгебраический, геометрический, вероятностно-геометрический, а также удачное сочетание этих методов[7]. С помощью геометрического моделирования в 1984 году удалось сконструировать полный базис гексагона[4],базисная функция которого, соответствующая узлу 1 (рис.1), задана выражением (4), но он оказался не полиномиальным, а дробно-рациональным (ДРБ). Первый полиномиальный базис гексагона (ПБ) был предложен в работе [5], однако данный базис не удовлетворял условию (3). В работах [7], [8] были построены гармонические полиномиальные базисы третей (ГПБ3) и четвертой (ГПБ4) степеней, базисные функции которых, соответствующие узлу 1 (рис.1), задаются выражениями (5), (6):

$$N_{ДРБ,1}(x,y)=\frac{\left(1-\frac{4}{3}y^2\right)\left((1+x)^2-\frac{1}{3}y^2\right)}{9\left(\left(1-\frac{1}{3}x\right)^2-\frac{1}{3}y^2\right)} \tag{4}$$

$$N_{ГПБ\ 3,1}(x,y)=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\left(x^2-y^2\right)+\frac{1}{6}\left(x^3-3xy^2\right), \tag{5}$$

$$N_{ГПБ\ 4,1}(x,y)=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}x+\frac{17}{63}\left(x^2-y^2\right)+\frac{1}{6}\left(x^3-3xy^2\right)+\frac{4}{63}\left(x^4-6x^2y^2+y^4\right) \quad . \tag{6}$$

Цель статьи. Цель данной работы состоит в том, чтобы построить все множество полных по отношению к линейным функциям полиномиальных базисов гексагона третей и четвертой степеней, а также вычислить локальные характеристики этих базисов для прогноза аппроксимационных качеств.

Основная часть. В работе рассмотрен дискретный элемент в форме правильного шестиугольника, вписанный в окружность единичного радиуса с центром в начале координат(рис. 1).

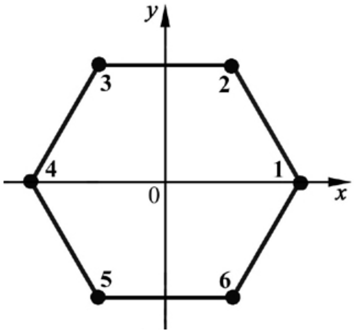

Рис.1. Гексагональный элемент с 6-ю узлами

Будем строить базисную функцию, соответствующую узлу 1 (рис.1) в виде полинома 4-й степени. Из физических соображений естественно потребовать, чтобы базисная функция была симметрична относительно оси *OX*, поэтому полином должен быть четной функцией по переменной *y*:

$$N_1(x,y)=\frac{1}{6}+b_1x+b_2x^2+b_3y^2+b_4x^3+b_5xy^2+b_6x^4+b_7x^2y^2+b_8y^4, \tag{7}$$

где $b_1,...,b_8$ – числовые коэффициенты. Остальные БФ могут быть получены из $N_1(x,y)$ поворотом системы координат на угол кратный 60^0.

Потребовав выполнение условий (1) – (3), получим систему уравнений, решая которую, находим значения коэффициентов:

$$b_1=\frac{1}{3};\ b_3=-b_2;\ b_4=\frac{1}{6};\ b_5=-\frac{1}{2};\ b_6=\frac{1}{3}-b_3;\ b_7=-(1-3b_3+3b_8).$$

В результате полином (7) примет вид:

$$N_{ППБ,1}(x,y)=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}x+b_2\left(x^2-y^2\right)+\frac{1}{6}\left(x^3-3xy^2\right)+\left(\frac{1}{3}-b_2\right)x^4-\left(1-3b_2+3b_8\right)x^2y^2+b_8y^4. \tag{8}$$

Полученные результаты позволяют сформулировать следующее утверждение.

Утверждение 1. Существует двухпараметрическое семейство полных полиномиальных базисов(ППБ) гексагона 4-ой степени, базисные функции которых, соответствующие узлу 1 (рис.1), задаются выражением (8).

Отметим, что только при $b_2=1/3$ и$b_8=0$ базисная функция (8) оказывается полиномом 3-й степени, совпадающий с выражением (5), что дает возможность сформулировать следующее утверждение.

Утверждение 2. Существует единственный полный полиномиальный базис гексагона 3-й степени (ГПБ3), базисная функция которого, соответствующая узлу 1 (рис.1), задается выражением (5).

Более детальные исследования показывают, что базис ГПБ3 точно аппроксимирует не только линейные функции, но и все гармонические полиномы до 3-й степени включительно.

При решении уравнения Лапласа желательно, чтобы базисные функции удовлетворяли этому уравнению. Расчеты показывают:

$$\frac{\partial^2 N_{ППБ,\,1}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 N_{ППБ,\,1}}{\partial y^2}=\left(2-6b_2-6b_8\right)\left(x^2-y^2\right).$$

Как видно из данного выражения, базисная функция удовлетворяет уравнению Лапласа при $b_2=\frac{1}{3}-b_8$. Базисная функция полного гармонического полиномиального базиса (ПГПБ) гексагона, соответствующая узлу 1 (рис.1), принимает вид:

$$N_{ПГПБ,\,1}(x,y)=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}x+(\frac{1}{3}-b_8)\left(x^2-y^2\right)+\frac{1}{6}\left(x^3-3xy^2\right)+b_8(x^4-6x^2y^2+y^4). \qquad (9)$$

Отсюда получаем следующее утверждение.

Утверждение 3. Существует однопараметрическое семейство полных гармонических полиномиальных базисов гексагона 4-й степени, базисные функции которых, соответствующие узлу 1 (рис.1), задаются выражением (9).

Отметим, что значение коэффициента b_8 желательно выбирать таким образом, чтобы минимизировать нелинейности на границе гексагона. Для этого можно накладывать дополнительные ограничения в виде обнуления значения функции в точках $(0,\pm\frac{\sqrt{3}}{2})$ на границе [8], в результате чего было получено b_8=4/63. Колебания на границе сделать более равномерными можно при выполнении следующего условия $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(N_{ПГПБ,\,1}\left(x,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)dx=0$, которое выполняется для b_8=5/78.

Отметим, что при b_8=4/63 мы получаем уже известный ГПБ4. На рис. 2 представлены графики базисной функции $N_1(x,y)$ для b_8=4/63, b_8=5/78. Базис при b_8=5/78 назовем гармоническим полиномиальным базисом альтернативным (ПГПБА).

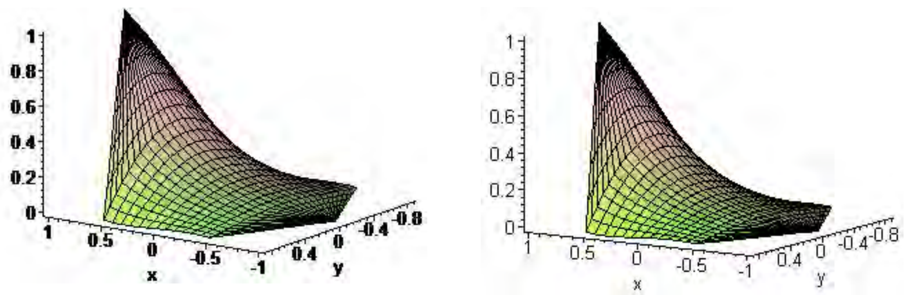

Рис.2 Графики ПГПБ $N_1(x, y)$ для b_8=4/63, b_8=5/78 соответственно

Для исследования свойств построенных базисов была вычислена матрица Грама базиса ППБ $M_{ik}=\iint_{\Omega}N_{ППБ.i}(x.y)\cdot N_{ППБ.k}(x.y)\,dx\,dy$, ($\Omega$ – множество точек гексагона) и число обусловленности этой матрицы $\chi(M)$ в евклидовой норме. Число обусловленности матрицы играет важную роль при численном решении различных прикладных задач, являясь показателем устойчивости решения задачи[10]. Зависимость $\chi(M)$ от параметров b_2, b_8 представлена на рис.3. На рисунке видно, что существует целая полоса значений (b_2, b_8), за исключением небольшой окрестности начала координат, где $\chi(M)$ принимает наименьшее значение 10,87. В эту полосу попадают точки с координатами $(\frac{1}{3},0)$, $(\frac{17}{63},\frac{4}{63})$, $(\frac{21}{78},\frac{5}{78})$, при которых мы получаем базис ГПБ3 и оба гармонических базиса 4-й степени. Отметим, что для базиса ДРБ $\chi(M)$ =13,98. Напомним, что лучшим считается базис, число обусловленности матрицы Грама которого меньше.

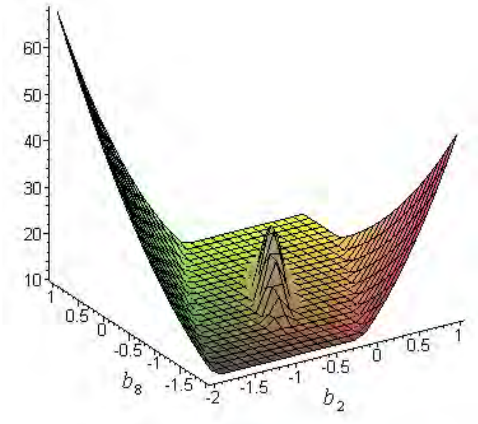

Рис. 3. Зависимость числа обусловленности матрицы Грама $\chi(M)$ от двух параметров b_2, b_8

В качестве объекта тестирования была выбрана гармоническая функция $f(x,y) = -\frac{1}{2}\ln\left(\left(x+2\right)^2 + y^2\right) + 3$. Точные значения этой функции сравнивались с приближенными, вычисленными с помощью базисов ДРБ, ГПБ3, ГПБ4 и ГПБА в точках с координатами $(0,0)$, $(0,\pm\frac{1}{2})$, $(\pm\frac{1}{2},0)$, $(\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2})$. Максимальная относительная погрешность при использовании базиса ДРБ составила 0,41%, базиса ГПБ3 – 0,43%, а базисов ГПБ4 и ГПБА – 0,27%.

Вывод. В работе построено двухпараметрическое семейство полных полиномиальных базисов гексагона 4-ой степени, частным случаем которого является единственный полный полиномиальный базис 3-й степени (ГПБ3). Из двухпараметрического семейства выделено однопараметрическое семейство гармонических полных полиномиальных базисов гексагона 4-ой степени. Тестирование показало, что гармонические базисы ГПБ3, ГПБ4, ГПБА с достаточно высокой точностью аппроксимируют гармонические функции. Кроме того, численные процедуры с использованием этих базисов устойчивы по отношению к малым изменениям исходных данных, о чем свидетельствует небольшая величина числа обусловленности матрицы Грама этих базисов.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов.- М.: Мир.- 1977.- 349 с.
2. Зенкевич О.,Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. - М.: Мир, 1986.-318с.
3. Wachspress E.L. A rational finite element basis. – Academic Press. – New York, 1975. – 216p.
4. Ishiguro M. Construction of Hexagonal Basis Functions Applied in the Galerkin-Type Finite Element Method: “J.Inf. Process”, 1984, v.7, № 2, p. 88-95.
5. Гучек П.И. Геометрическое моделирование полиномиальных базисов шестиугольного элемента /П.И. Гучек, Е.И.Литвиненко, А.Н. Хомченко // Сб. тр. III Межд. конф. “Совр. пробл. геом. моделир.” – Мелитополь: ТГАТА, 1996. - С. 43.
6. ХомченкоА.Н.Моделированиеполиномиальногобазиса гексагона/ А.Н. Хомченко, С.В. Моисеенко, Ю.И.Николаенко // Питання прикладної математики і математичного моделювання. – Дніпропетровськ: ДНУ, 2006. – С.242-249.
7. Цыбуленко О.В. Альтернативне модели гексагональних базисов / О.В. Цыбуленко, Е.И. Литвиненко, Ю.И. Николаенко // Системні технології. – Дніпропетровськ, 2006. – Вип.3(44) – С.155-161.
8. Николаенко Ю.И. Моделирование гармонического полиномиального базиса гексагона / Ю.И. Николаенко, С.В. Моисеенко // Автоматика. Автоматизация. Электротехнические комплексы и системы (ААЭКС). – Херсон: ХНТУ, 2007. – №1(19). – С. 31-34.
9. Маслов Л.Б. Курс лекций. Численные методы механики. / Л.Б. Маслов // Иван.гос. энерг. ун-т.- Иваново, ИГЭУ, 1999.-106с.
10. Форсайт Дж., Молер К. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений (пер. с англ.). – М: Мир, 1969. – 168 с.

НИКОЛАЕНКО Юрий Иванович – преподаватель лицея при Херсонском национальном техническом университете и Днепропетровском национальном университете.
Научные интересы:
- математическое моделирование, методы восстановления гармонических функций.

МОИСЕЕНКО Светлана Викторовна – к.т.н., доцент кафедры высшей математики и математического моделирования Херсонского национального технического университета.
Научные интересы:
- методы восстановления гармонических функций.