УДК 629.12.01

О.О. Новосадовський

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ГІДРОДИНАМІЧНОЇ ВЗАЄМОДІЇ ПІДВОДНОГО АПАРАТУ З ПОВЕРХНЕВИМИ ХВИЛЯМИ

Постановка проблеми. При математичному моделюванні динамічної поведінки плавучого об'єкту типу підводного апарату (ПА), що рухається та коливається під вільною поверхнею рідини, серйозною проблемою є обчислення гідродинамічних реакцій, що діють на об'єкт. Коректне вирішення вказаної проблеми, а, отже, і визначення механічних елементів руху об'єкту, потребує урахування тих збурень, які вносяться у рідину самим об'єктом при його коливаннях. Як відомо [3], в гідродинамічній теорії хитавиці корабля проблема гідродинамічних сил зводиться до крайової задачі теорії потенціалу. Аналогічний підхід використовуватимемо в даній роботі, причому, беручи до уваги значну видовженість ПА, скористаємось методом плоских перетинів і обмежимось двовимірним варіантом крайової задачі про збурений шпангоутним контуром (коло заданого радіуса) ПА рух рідини.

Для математичного формулювання вказаної крайової задачі введемо у розгляд праву систему координат *oxyz*, площини *oxy*, *oxz* та *oyz* якої співпадають відповідно з вільною поверхнею рідини у стані рівноваги, з діаметральною площиною ПА та площиною його мідель-шпангоуту. Осі *ox*, *oy* та *oz* напрямлено в ніс, на лівий борт ПА та вертикально вгору. Система *oxyz* переміщується разом з ПА в напрямку осі *ox* зі швидкістю *v* (але не коливається) і слугує для опису як відносного руху рідини, так і ПА. В цій системі контур шпангоуту *C* з абсцисою *x* описується рівнянням

$$y^2+(z+h)^2=r^2,$$

де h – занурення центра кола радіуса $r = r(x)$.

Розглядувану крайову задачу про збурений рух рідини, викликаний коливаннями кругового контуру *C* під її вільною поверхнею, розв'язуватимемо в наближеній постановці, використовуючи для спрощення наступні припущення:

- навколишня по відношенню до шпангоутного контуру рідина є ідеальною і нестисливою, а її рух – потенційним;
- контур *C* є абсолютно твердим тілом з двома ступенями свободи, яке при хитавиці здійснює лінійні горизонтальні та вертикальні коливання;
- переміщення, швидкості і прискорення контуру при хитавиці є величинами першого порядку малості, квадратами і добутками яких в першому наближенні можна знехтувати;
- прогресивні хвилі, що набігають на контур, і коливання контуру є усталеними, внаслідок чого їх часова залежність враховується шляхом введення множника $\exp(i\sigma t)$, де σ – кругова частота, а t – час, причому у виразах, що містять цей множник, до уваги береться тільки їх дійсна частина;
- вільна поверхня рідини є вільним струменем, що справджується при $\sigma \to \infty$.

Якщо потенціал Φ збуреного контуром *C* руху рідини представити у вигляді [3]

$$\Phi=\dot{\zeta}_2\chi_2+\dot{\zeta}_3\chi_3,$$

де ζ_2, ζ_3 – лінійні переміщення контуру при горизонтальних та вертикальних коливаннях, а точка над символом означає диференціювання відповідної величини за часом t, то крайові задачі для знаходження складових χ_j, $j = 2, 3$, потенціалу Φ допускають наступне формулювання.

В зайнятій рідиною області (нижня півплощина площини *oyz*, зовнішня відносно контуру *C*) визначити потенціали χ_j, $j = 2, 3$, як функції, що задовольняють рівняння Лапласа

$$\Delta\chi_j=\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\chi_j=0$$

та граничні умови

- безвідривного обтікання в точках контуру *C*

$$\frac{\partial\chi_2}{\partial n}=\cos(n,y)=\frac{\partial y}{\partial n},\qquad \frac{\partial\chi_3}{\partial n}=\cos(n,z)=\frac{\partial z}{\partial n},$$

де $\boldsymbol{n}$ – орт нормалі до контуру *C*;

- на вільній поверхні рідини при $z = 0$ $\chi_j = 0$.

Це є, так би мовити, "мінімальна" постановка задачі.

Аналіз публікацій за темою дослідження. Хоча з одного боку круговий контур і є одним з найпростіших за формою об'єктів та належить до найбільш поширених геометричних форм, що використовуються в океанотехніці (поперечні перетини корпусів суден з малою площею ватерлінії, колони бурових установок, підводні човни та апарати тощо), а з іншого - як гідродинамічний об'єкт завжди привертав і привертає увагу вітчизняних і зарубіжних науковців і інженерів-дослідників [1, 2], проте наявність вільної поверхні рідини та хвилеутворення, що супроводжує коливання контуру, значною мірою ускладнюють задачу визначення гідродинамічних реакцій навколишньої рідини та елементів динамічної поведінки контуру; саме з цієї причини, не зважаючи на очевидну актуальність, в фаховій літературі прикладів не тільки точного, але й наближеного розв'язку подібного роду задач не так вже й багато [1, 2]. Об'єктивне уявлення про стан досліджень та отримані результати світової науки в різних аспектах розглядуваного питання можна скласти на основі матеріалів монографії [1].

Мета статті. В роботі [2] в лінійному наближенні отримано розв'язок гідродинамічної задачі про хвильовий рух нестисливої рідини, збурений гармонічними коливаннями кругового контуру під її вільною поверхнею, а також встановлено формули для розрахунку гідродинамічних реакцій, що діють на контур. Однак вказані результати з погляду проведення практичних обчислень представляються дещо заскладними і тому метою даної статті **є** розробка достатньо простого та ефективного методу розрахунку коефіцієнтів приєднаних мас і демпфірування та головної (криловської) і дифракційної (гідродинамічної) частин сил, що збурюють на хвилях коливання видовженого ПА в умовах стоянки (швидкість $v = 0$) чи поступального руху ($v \neq 0$).

Основна частина. Наведемо без зайвих деталей (які при бажанні можна дуже просто відновити) результати проведеного дослідження.

Конформне перетворення областей. Представляється доцільним перейти від змінних (y, z) фізичної площини шпангоуту з абсцисою x до параметричної площини $u = \theta + i\tau$, використовуючи конформне перетворення [2]

$$y + iz = il\frac{1-\xi}{1+\xi} = il\frac{1-\mathrm{e}^{iu}}{1+\mathrm{e}^{iu}} = l\,\mathrm{tg}\frac{\theta + i\tau}{2}, \qquad l = \sqrt{h^2 - r^2}\,,$$

де l – масштабний множник.

Зазначимо, що наведене конформне перетворення відображає внутрішність прямокутника $\Pi = \{(\theta, \tau) \mid -\pi \le \theta \le \pi, -\tau_0 \le \tau \le 0\}$ – канонічна область параметричної площини – на область течії в фізичній площині, причому верхня сторона прямокутника Π, тобто відрізок $-\pi \le \theta \le \pi$ дійсної осі, відповідає вільній поверхні рідини у фізичній площині, а нижня сторона $\tau = -\tau_0$ прямокутника Π – контуру C.

Потенціали швидкостей χ_2, χ_3**.** Знаходження виразів для функцій χ_2, χ_3 через параметричні змінні θ і τ при наявності відповідних функцій Гріна [2] здійснюється на основі формули Гріна [1, 3]; наведемо остаточні формули для потенціалів χ_2, χ_3:

$$\chi_2(\theta,\tau) = -2\sum_{n=1}^{\infty}\sin n\theta\frac{(-1)^n\,\mathrm{e}^{-n\tau_0}}{\mathrm{ch}\,n\tau_0}\mathrm{sh}\,n\tau, \qquad \chi_3(\theta,\tau) = -2\sum_{n=1}^{\infty}\cos n\theta\frac{(-1)^n\,\mathrm{e}^{-n\tau_0}}{\mathrm{ch}\,n\tau_0}\mathrm{sh}\,n\tau.$$

Константи B_j, $j = 2, 3$. Ці константи використовуються як при визначенні асимптотичних на нескінченості значень потенціалів, що описують хвилеутворення при коливаннях тіл в рідині з вільною поверхнею [3], так і при розрахунку деяких категорій гідродинамічних реакцій, що діють на рухомі в рідині об'єкти. За рекомендацією М.Д. Хаскінда [3] константи B_j у випадку коливань плоского контуру C слід обчислювати за формулою

$$B_j = \int_C\left(\frac{\partial\chi_j}{\partial n} - \chi_j\frac{\partial}{\partial n}\right)\exp(kz + iky)\,ds, \qquad k = \frac{\sigma^2}{g}.$$

При обчисленні констант B_j, $j = 2, 3$, доцільним є перехід від фізичних (y, z) до параметричних змінних (θ, τ); в результаті після виконання низки простих, але дещо громіздких перетворень отримуємо

$$B_3 = -2\pi k\,l^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\exp(-k\,l\,\mathrm{cth}\,n\tau_0)}{\mathrm{sh}^2\,n\tau_0}, \qquad B_2 = i\,B_3,$$

причому виписаний ряд є абсолютно збіжним при будь – яких значеннях параметрів τ_0 та k.

Коефіцієнти демпфірування шпангоутного контуру. Наявність величин B_j, $j = 2, 3$, дозволяє отримати наближені значення коефіцієнтів демпфірування λ_{jj}, $j = 2, 3$, для всього діапазону частоти $\sigma \in (0, \infty)$ за допомогою формули М.Д. Хаскінда [3]

$$\lambda_{jj}(\sigma) = \rho\sigma\,|\,B_j(kl)\,|^2 = \sigma f(kl), \qquad f(kl) = \rho\,|\,B_j(kl)\,|^2,$$

де ρ - масова густина рідини, а дві вертикальні лінії означають модуль комплексної величини.

Коефіцієнти приєднаних мас шпангоутного контуру. При нескінченно великих значеннях частоти коливань контуру C його коефіцієнти приєднаних мас обчислюються за формулою

$$\mu_{jj}(\infty) = -\rho\int_C\chi_j\frac{\partial\chi_j}{\partial n}\,ds = 4\pi\rho l^2\sum_{n=1}^{\infty}n\,\mathrm{th}n\tau_0\exp(-2n\tau_0) = \pi\rho\,l^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}e_n}{\mathrm{sh}^2 n\tau_0},$$

де $e_n = 1$ при $n = 1$ і $e_n = 2$ при $n \neq 1$. Щоб отримати значення коефіцієнтів μ_{jj} для діапазону частоти $\sigma \in (0, \infty)$ слід скористатися вищезгаданим співвідношенням Крамерса – Кроніга [4]

$$\mu_{jj}(\sigma) = \mu_{jj}(\infty) + \frac{2}{\pi}\; v.p.\int_0^\infty \frac{\lambda_{jj}(s)}{s^2 - \sigma^2}\, ds\;,$$

де літери *v.p.* означають, що інтеграл розуміється в сенсі головного значення за Коші. При обчисленні сингулярного інтеграла від розмірної змінної інтегрування - кругової частоти коливання σ - доцільно перейти до безрозмірної змінної kl, скориставшись формулою зв'язку між круговою частотою і частотою форми k: $\sigma^2 = gk$. то для обчислення розглядуваного сингулярного інтеграла достатньо мати у своєму розпорядженні значення наступного інтеграла

$$v.p.\int_0^\infty \frac{\exp(-ct)}{t - x}dt = c^{-2} + \frac{x}{c} + x^2\exp(-cx)\left(E_1(cx) - 2\int_0^{cx}\frac{\mathrm{sh}t}{t}dt\right),$$

де c та x – дійсні величини, причому c, $x \in (0, \infty)$, а через $E_1(x)$ – позначено інтегральну показникову функцію [6].

До дифракційної проблеми. Потенціал Φ^* прогресивних хвиль є функцією апріорі заданою [3]. В системі координат *oxyz*, що поступально рухається з ПА зі швидкістю v, цей потенціал записується так

$$\Phi^*(x, y, z, t) = -i\frac{g}{\sigma_0}r_0\exp(k(z - ix\cos\varepsilon - iy\sin\varepsilon) + i\sigma t),$$

де r_0 - амплітуда хвиль, ε - курсовий кут розповсюдження хвиль відносно апарату, σ_0, σ - відповідно істинна та позірна частота прогресивних хвиль, k - хвильове число, g – прискорення вільного падіння. Між величинами σ_0, σ та k існують відомі [3] співвідношення: $\sigma = \sigma_0 - k\,v\cos\varepsilon$ і $k = \sigma_0^2/g$.

Наявність ПА на шляху розповсюдження хвиль вносить збурення в навколишню рідину, що описуються потенціалом дифракції Φ^0, який є розв'язком спеціальної крайової задачі теорії потенціалу. Співвідношення М.Д. Хаскінда [3] дозволяє при визначенні дифракційної частини гідродинамічних реакцій, що діють на ПА, уникнути розв'язку дифракційної крайової задачі.

В цілях зручності подальшого викладення матеріалу статті і запису формул доцільним є представлення потенціалу прогресивних хвиль Φ^* і потенціалу дифракції Φ^0 у вигляді

$$\Phi^*(x, y, z, t) = -i\frac{g}{\sigma_0}r_0\exp(i\sigma t - ik_1 x)\,e^*(y, z), \qquad e^*(y, z) = \exp(kz - ik_2 y)\,,$$

$$\Phi^\circ(x, y, z, t) = -i\frac{g}{\sigma_0}r_0\exp(i\sigma t - ik_1 x)\,e^\circ(y, z), \qquad k_1 = k\cos\varepsilon, \qquad k_2 = k\sin\varepsilon,$$

де просторову координату x фіксовано, а $e^\circ(y, z)$ – невідома гармонічна функція координат y і z, яка в точках шпангоутного контуру C задовольняє граничну умову

$$\frac{\partial e^\circ}{\partial n} = -\frac{\partial e^*}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial n}\exp(kz - ik_2 y)\,.$$

Гідродинамічні сили, що збурюють коливання контуру С. В корабельній гідродинаміці ці сили підрозділяють на дві складові, одна з яких визначається потенціалом прогресивних хвиль, а інша – потенціалом дифракції [3]. При застосування методу плоских перетинів визначення цієї категорії сил зводиться до обчислення наступного інтегралу по шпангоутному контуру C апарату

$$\int_C \left(e^*(y, z) + e^\circ(y, z)\right)\frac{\partial\chi_j}{\partial n}ds = \int_C \left(e^*(y, z)\frac{\partial\chi_j}{\partial n} - \chi_j\frac{\partial}{\partial n}e^*(y, z)\right)ds =$$

$$= \int_C \left(\frac{\partial\chi_j}{\partial n} - \chi_j\frac{\partial}{\partial n}\right)\exp(kz - ik_2 y)ds = \int_{-\pi}^{\pi}\left.\frac{\partial\chi_j}{\partial\tau}\right|_{\tau=0}\exp(-ik_2 l\,\mathrm{tg}\frac{\theta}{2})\,d\theta = \overline{B_j\,(k_2 l)}\,,$$

де горизонтальна риска над символом означає перехід до комплексно спряженої величини. Заміну другого доданку на $-\chi_j\partial e^*/\partial n$ в підінтегральному виразі першого інтеграла здійснено у відповідності зі співвідношенням М.Д. Хаскінда та граничною умовою, яку на контурі C задовольняє потенціал дифракції Φ^0.

Гідродинамічні характеристики підводного апарату. Формули для гідродинамічних реакцій, що діють на ПА встановлюються шляхом інтегрування відповідних величин по довжині L ПА (форма ПА в поздовжньому напрямі враховується через залежність від координати x радіуса r поперечного перетину: $r = f(x)$, де $f(x)$ – задана функція). Умовимось спершу у деяких позначеннях: поперечно – горизонтальну, вертикальну, кільову хитавицю та рискання ПА позначатимемо як в гідродинамічній теорії [3] індексами 2, 3, 5 та 6; характеристику, що стосується шпангоуту з абсцисою x, позначатимемо як функцію змінної x; цю ж характеристику для всього апарату в умовах стоянки (швидкість $v = 0$) позначатимемо тим же символом, але як константу; у випадку поступального руху ПА ($v \neq 0$) – константу позначатимемо великою літерою. Крім того, введемо ще таке позначення $c_{jj}(x) = \mu_{jj}(x) - i\lambda_{jj}(x)/\sigma$, $j = 2, 3$, яке дозволяє представити відповідні гідродинамічні характеристики апарату при $v = 0$ наступним чином

$$c_{jj} = \mu_{jj} - \frac{i}{\sigma}\lambda_{jj} = \int_{-L/2}^{L/2} (\mu_{jj}(x) - \frac{i}{\sigma}\lambda_{jj}(x))dx = \int_{-L/2}^{L/2} c_{jj}(x)dx, \quad j = 2,\ 3,$$

$$c_{26} = \mu_{26} - \frac{i}{\sigma}\lambda_{26} = \int_{-L/2}^{L/2} x\, c_{22}(x)dx, \qquad c_{35} = \mu_{35} - \frac{i}{\sigma}\lambda_{35} = -\int_{-L/2}^{L/2} x\, c_{33}(x)dx,$$

$$c_{55} = \mu_{55} - \frac{i}{\sigma}\lambda_{55} = \int_{-L/2}^{L/2} x^2\, c_{33}(x)dx, \qquad c_{66} = \mu_{66} - \frac{i}{\sigma}\lambda_{66} = \int_{-L/2}^{L/2} x^2\, c_{22}(x)dx\,.$$

При $v \neq 0$ розрахункові формули дещо ускладнюються:

$$M_{jj} = \mu_{jj}, \quad \Lambda_{jj} = \lambda_{jj}, \ j = 2,\ 3;$$

$$\left.\begin{matrix} M_{26} \\ M_{62} \end{matrix}\right\} = \mu_{26} \pm \frac{v}{\sigma^2}\lambda_{22}, \ \left.\begin{matrix} \Lambda_{26} \\ \Lambda_{62} \end{matrix}\right\} = \lambda_{26} \mp v\mu_{22}, \qquad \left.\begin{matrix} M_{35} \\ M_{53} \end{matrix}\right\} = \mu_{35} \pm \frac{v}{\sigma^2}\lambda_{33}, \ \left.\begin{matrix} \Lambda_{35} \\ \Lambda_{53} \end{matrix}\right\} = \lambda_{35} \mp v\mu_{33},$$

$$M_{55} = \mu_{55} + \frac{v^2}{\sigma^2}\mu_{33}, \quad \Lambda_{55} = \lambda_{55} + \frac{v^2}{\sigma^2}\lambda_{33} \qquad M_{66} = \mu_{66} + \frac{v^2}{\sigma^2}\mu_{22}, \quad \Lambda_{66} = \lambda_{66} + \frac{v^2}{\sigma^2}\lambda_{22},$$

проте як при $v = 0$, так і при $v \neq 0$ інерційно – демпфірувальні сили обчислюються за однією і тією ж формулою [2, 3] (просто в умовах стоянки ПА слід покласти $v = 0$):

$$F_j^M = -\sum_k \left(\mathrm{M}_{jk}\ddot{\zeta}_k + \Lambda_{jk}\dot{\zeta}_k\right),$$

де сума розповсюджується тільки на індекси $k = 2, 3, 5$ і 6.

Обчислення зумовлених прогресивними хвилями (з урахуванням явища їх дифракції на ПА) сил $F_j^E = A_j \exp(i\sigma t)$, що збурюють коливання апарату, зводиться до знаходження комплексних амплітуд A_j вказаної категорії сил як інтегралів:

$$A_j = -\rho g r_0 \int_{-L/2}^{L/2} \overline{B_j(k_2 l(x))} \exp(-ik_1 x)dx, \qquad j = 2,\ 3, \qquad l(x) = \sqrt{h^2 - r^2(x)}\,,$$

$$A_5 = \rho g r_0 \int_{-L/2}^{L/2} x\overline{B_3(k_2 l(x))} \exp(-ik_1 x)dx, \qquad A_6 = -\rho g r_0 \int_{-L/2}^{L/2} x\overline{B_2(k_2 l(x))} \exp(-ik_1 x)dx\,.$$

Ефект наявності поступальної швидкості апарату проявляється через частотний параметр: при $v \neq 0$ частота σ хвиль – позірна, при $v = 0$ – істинна σ_0.

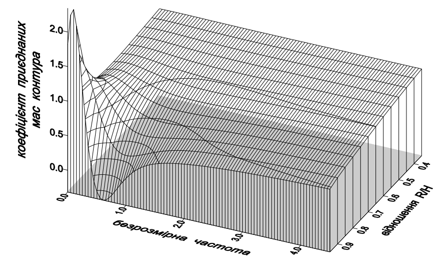
Ілюстративні приклади. Про ефективність і можливості розробленого методу можна скласти певне судження з представлених на Рис.1 - Рис.6 результатів обчислення гідродинамічних характеристик хитавиці шпангоутного контуру. На цих рисунках прийнято такі позначення: безрозмірна частота – величина $\sigma_0^2 l/g$, коефіцієнт приєднаних мас контура - $\mu_{jj}/\pi\rho r^2$, коефіцієнт демпфірування контура - $\lambda_{jj}/\sigma\pi\rho r^2$, збурююча сила - $A_j/\pi\rho g r_0 r$, причому відповідні значення виписаних величин є справедливими для $j = 2$ і $j = 3$.

Висновки та перспективи подальших досліджень.

1. На основі розв'язку крайової задачі про вимушені прогресивними хвилями коливання кругового контуру під вільною поверхнею нестисливої рідини розроблено простий і ефективний метод розрахунку гідродинамічних характеристик хитавиці ПА як функцій частоти $\sigma \in (0, \infty)$.

2. Отримані результати реалізовано при створенні робочих програм розрахунку на ЕОМ гідродинамічних реакцій, що діють на ПА при його коливаннях.

3. Інформація про гідродинамічні характеристики хитавиці ПА на нескінченому інтервалі частот дозволить вирішувати питання про динамічну поведінку ПА та деформації його корпусу на нерегулярних морських хвилях.



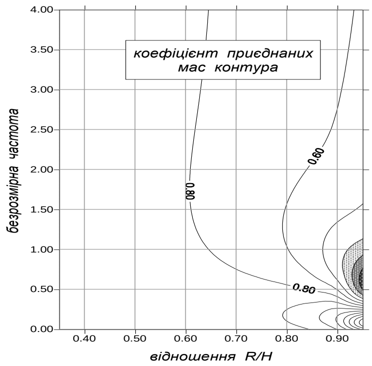
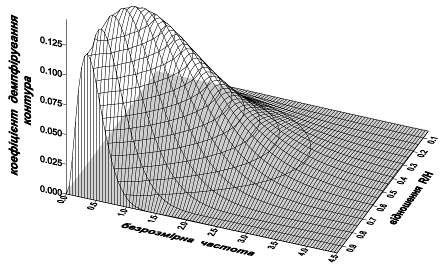


Рис. 1. Поверхня μ_{33}.

Рис. 2. Лінії рівня поверхні μ_{33}.



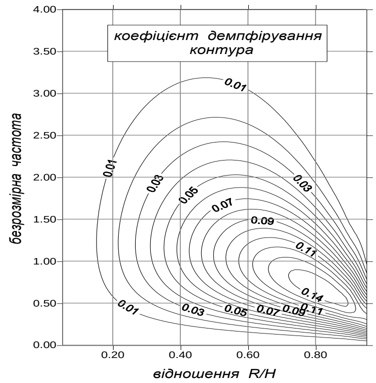
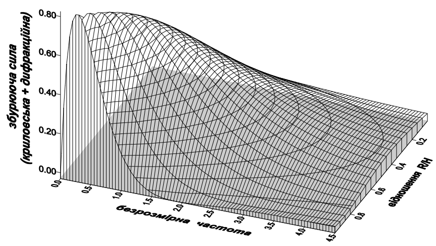


Рис. 3. Поверхня λ_{33}.

Рис. 4. Лінії рівня поверхні λ_{33}.



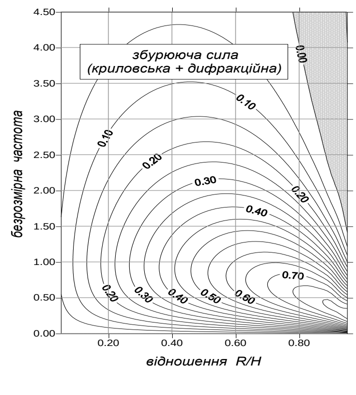


Рис. 5. Поверхня A_3.

Рис. 6. Лінії рівня поверхні A_3.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости. / Л.Н. Сретенский. – М.: Наука, 1977. – 816с.
2. Трунов О.М. Гідродинамічна задача про коливання кругового контуру під вільною поверхнею рідини. / О.М. Трунов, О.О. Новосадовський // Зб. наук. праць НУК. – Миколаїв: НУК, 2012. – №2 – С. 22 – 33.
3. Хаскинд М.Д. Гидродинамическая теория качки корабля. / М.Д. Хаскинд. – М.: Наука, 1973. – 327с.
4. Kotik J. On the Kramers – Kronig relations for ship motions. / J. Kotik, V. Mangulis // Internat. Shipbuilding Progress. – 1962. – v.9, N. 97, – pp. 361 – 368.

НОВОСАДОВСЬКИЙ Олексій Олександрович – аспірант Чорноморського державного університету імені Петра Могили.

Наукові інтереси:

- інформаційні технології, корабельна гідродинаміка.