

**ПОЛУМАРКОВСКАЯ МОДЕЛЬ КОНТРОЛЯ СКРЫТЫХ ОТКАЗОВ ДВУХКОМПОНЕНТНОЙ СИСТЕМЫ С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМ СОЕДИНЕНИЕМ КОМПОНЕНТОВ**

**Постановка проблемы.** Повышение и поддержание надежности технических систем является актуальной проблемой современного производства. На помощь в решении данной проблемы приходят автоматизированные системы управления технологическими процессами, которые включают в себя автоматизированные системы технического контроля [1]. С другой стороны, для современного производства остается актуальной проблема своевременного выявления скрытых отказов, которые могут быть обнаружены только во время проведения контроля. Для обеспечения максимальной надежности и эффективности функционирования технических систем необходимо, чтобы периодичность проведения контроля была оптимальной. Решение данной задачи приводит к созданию математических моделей функционирования технических систем, которым свойственны скрытые отказы.

**Анализ публикаций по теме исследования.** В современных источниках [2, 3] рассматриваются математические модели систем с учетом контроля скрытых отказов. Однако, в них не учитывается структура контролируемых систем.

**Цель статьи.** Целью статьи является определение оптимальной периодичности контроля скрытых отказов двухкомпонентной восстанавливаемой системы с параллельным соединением компонентов (в надежностном смысле) с их отключением на период проведения контроля. Для описания функционирования системы, используется полумарковский процесс (ПМП) с общим фазовым пространством состояний [4].

**Основная часть.** Рассмотрим функционирование системы  $S$ , которая состоит из двух параллельно соединенных компонентов  $K_1$  и  $K_2$  и аппаратуры, контролирующей их работоспособность. В начальный момент времени компоненты приступают к работе, контроль включен. Время безотказной работы компонентов – случайные величины (СВ)  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , которые имеют функции распределения (ФР)  $F_1(t) = 1 - e^{-\lambda_1 t}$  и  $F_2(t) = 1 - e^{-\lambda_2 t}$  и плотности распределения (ПР)  $f_1(t) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 t}$ ,  $f_2(t) = \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}$  соответственно. Контроль проводится через случайное время  $\delta$  с ФР  $R(t) = P\{\delta \leq t\}$  и ПР  $r(t)$ . На время проведения контроля компоненты отключаются. Отказ обнаруживается только в результате проведения контроля. Длительность проведения контроля СВ  $\gamma$  с ФР  $V(t) = P\{\gamma \leq t\}$  и ПР  $v(t)$ . После обнаружения отказа компонента  $K_1$  начинается его восстановление, компонент  $K_2$  и контроль отключаются. Время восстановления (ВВ) компонента  $K_1$  – СВ  $\beta_1$  с ФР  $G_1(t) = P\{\beta_1 \leq t\}$  и ПР  $g_1(t)$ . После обнаружения отказа компонента  $K_2$  начинается его восстановление, компонент  $K_1$  и контроль отключаются. ВВ компонента  $K_2$  – СВ  $\beta_2$  с ФР  $G_2(t) = P\{\beta_2 \leq t\}$  и ПР  $g_2(t)$ . В случае восстановления обоих компонентов система приступает к работе после восстановления последнего. После восстановления все свойства компонентов полностью обновляются. СВ  $\alpha_1, \alpha_2, \delta, \gamma, \beta_1, \beta_2$  предполагаются независимыми, имеющими конечные математические ожидания.

Функционирование системы опишем ПМП  $\xi(t)$  с дискретно-непрерывным фазовым пространством состояний. Введем следующее множество  $E$  полумарковских состояний системы:  
 $E = \{3111, 1011z, 2101z, 2001z, 1001z, 1322x, 2232x, 3330, 3000, 3030, 3222, 3322, 3232, 3300\}$ .

Временная диаграмма функционирования системы и граф переходов представлены на рисунках 1, 2 соответственно. Коды состояний имеют следующий содержательный смысл:

3111 – система приступила к работе: оба компонента  $K_1$  и  $K_2$  работоспособны, контроль включен;  
 1011z – компонент  $K_1$  отказал, компонент  $K_2$  работоспособен, до начала контроля осталось время  $z > 0$ ;  
 2101z – компонент  $K_2$  отказал, компонент  $K_1$  работоспособен, до начала контроля осталось время  $z > 0$ ;  
 3030 – начался контроль, компонент  $K_1$  в отказе, компонент  $K_2$  работоспособен, работа компонентов  $K_1$  и  $K_2$  приостановлена;  
 2001z – компонент  $K_1$  в отказе, отказал компонент  $K_2$ , до начала контроля осталось время  $z > 0$ ;  
 3300 – начался контроль, компонент  $K_1$

работоспособен, компонент  $K_2$  в отказе, работа компонентов  $K_1$  и  $K_2$  приостановлена; 1001z – отказал компонент  $K_1$ , компонент  $K_2$  в отказе, до начала контроля осталось время  $z > 0$ ; 3232 – в компоненте  $K_1$  обнаружен отказ, началось его восстановление, работа компонента  $K_2$  и контроль приостановлены; 3330 – начался контроль, компоненты  $K_1$  и  $K_2$  работоспособны, их работа приостановлена; 3322 – в компоненте  $K_2$  обнаружен отказ, началось его восстановление, работа компонента  $K_1$  и контроль приостановлены; 3000 – начался контроль, компоненты  $K_1$  и  $K_2$  в отказе, их работа приостановлена; 3222 – обнаружены отказы компонентов  $K_1$  и  $K_2$ , началось их восстановление, контроль приостановлен; 1322x – компонент  $K_1$  восстановился, до восстановления компонента  $K_2$  осталось время  $x > 0$ ; 2232x – компонент  $K_2$  восстановился, до восстановления компонента  $K_1$  осталось время  $x > 0$ .

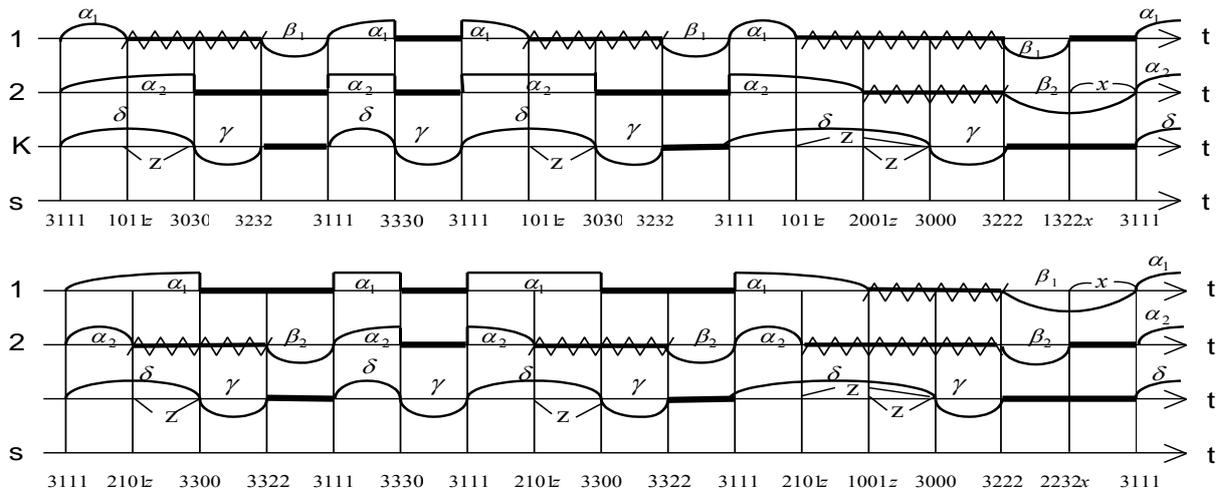


Рис. 1. Временная диаграмма функционирования системы

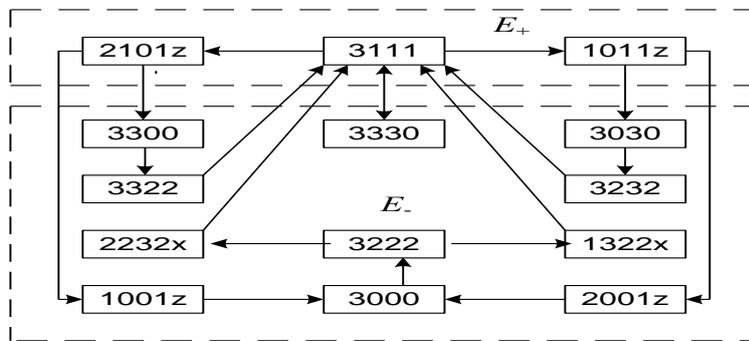


Рис. 2. Граф переходов системы с параллельным соединением компонентов

Найдем переходные вероятности вложенной цепи Маркова (ВЦМ)  $\{\xi_n; n \geq 0\}$ :

$$\begin{aligned}
 p_{3111}^{101z} &= \lambda_1 \int_0^{\infty} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} r(t+z) dt, \quad z > 0; \quad p_{3111}^{210z} = \lambda_2 \int_0^{\infty} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} r(t+z) dt, \quad z > 0; \\
 p_{3111}^{3330} &= \int_0^{\infty} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} r(t) dt; \quad p_{210z}^{3300} = e^{-\lambda_1 z}; \quad p_{210z}^{1001z_1} = \lambda_1 e^{-\lambda_1(z-z_1)}, \quad 0 < z_1 < z; \\
 p_{101z}^{3030} &= e^{-\lambda_2 z}; \quad p_{101z}^{2001z_1} = \lambda_2 e^{-\lambda_2(z-z_1)}, \quad 0 < z_1 < z; \\
 p_{3222}^{1322x} &= \int_0^{\infty} g_1(t) g_2(t+x) dt, \quad x > 0; \quad p_{3222}^{2232x} = \int_0^{\infty} g_2(t) g_1(t+x) dt, \quad x > 0. \\
 p_{3330}^{3111} &= p_{3300}^{3322} = p_{1001z}^{3000} = p_{3030}^{3232} = p_{2001z}^{3000} = p_{3322}^{3111} = p_{3000}^{3222} = p_{3232}^{3111} = p_{1322x}^{3111} = p_{2232x}^{3111} = 1.
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Обозначим через  $\rho(3111)$ ,  $\rho(3030)$ ,  $\rho(3300)$ ,  $\rho(3232)$ ,  $\rho(3330)$ ,  $\rho(3322)$ ,  $\rho(3000)$ ,  $\rho(3222)$  значения стационарного распределения ВЦМ  $\{\xi_n; n \geq 0\}$  на состояниях 3111, 3030, 3300, 3232, 3330, 3322, 3000, 3222 соответственно и предположим существование стационарных плотностей  $\rho(1011z)$ ,  $\rho(2101z)$ ,  $\rho(1001z)$ ,  $\rho(2001z)$ ,  $\rho(1322x)$ ,  $\rho(2232x)$  для состояний 1011z, 2101z, 1001z, 2001z, 1322x, 2232x соответственно. Составим для них систему интегральных уравнений. Можно показать, что она имеет следующее решение:

$$\begin{aligned} \rho(3111) &= \rho_0, \quad \rho(1011z) = \rho_0 \lambda_1 \int_0^{\infty} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} r(t+z) dt, \\ \rho(2101z) &= \rho_0 \lambda_2 \int_0^{\infty} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} r(t+z) dt, \quad \rho(3330) = \rho_0 \int_0^{\infty} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} r(t) dt, \\ \rho(3300) &= \rho_0 \left( \int_0^{\infty} e^{-\lambda_1 t} r(t) dt - \int_0^{\infty} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} r(t) dt \right), \quad \rho(3322) = \rho(3300), \\ \rho(3030) &= \rho_0 \left( \int_0^{\infty} e^{-\lambda_2 t} r(t) dt - \int_0^{\infty} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} r(t) dt \right), \quad \rho(3232) = \rho(3030), \\ \rho(1001z) &= \rho_0 \lambda_1 \left( \int_0^{\infty} e^{-\lambda_1 t} r(t+z) dt - \int_0^{\infty} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} r(t+z) dt \right), \\ \rho(2001z) &= \rho_0 \lambda_2 \left( \int_0^{\infty} e^{-\lambda_2 t} r(t+z) dt - \int_0^{\infty} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} r(t+z) dt \right), \\ \rho(3000) &= \rho_0 \left( 1 - \int_0^{\infty} e^{-\lambda_1 t} r(t) dt - \int_0^{\infty} e^{-\lambda_2 t} r(t) dt + \int_0^{\infty} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} r(t) dt \right), \quad \rho(3222) = \rho(3000), \\ \rho(1322x) &= \rho(3000) \int_0^{\infty} g_1(t) g_2(t+x) dt, \quad \rho(2232x) = \rho(3000) \int_0^{\infty} g_2(t) g_1(t+x) dt, \end{aligned} \quad (2)$$

где значение постоянной  $\rho_0$  находится из условия нормировки.

Разобьем фазовое пространство состояний  $E$  на следующие два подмножества:

$E_+ = \{3111, 2101z, 1011z\}$  – система работоспособна;

$E_- = \{3330, 3300, 3322, 3000, 3232, 3222, 3030, 1001z, 2001z, 1322x, 2232x\}$  – система находится в отказе.

Определим средние времена пребывания в состояниях системы:

$$\begin{aligned} m(3111) &= \int_0^{\infty} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} \bar{R}(t) dt, \quad m(3222) = \int_0^{\infty} \bar{G}_1(t) \bar{G}_2(t) dt, \quad m(3330) = M\gamma, \quad m(3300) = M\gamma, \\ m(3000) &= M\gamma, \quad m(3322) = M\beta_2, \quad m(3232) = M\beta_1, \quad m(1001z) = z, \quad m(2001z) = z, \\ m(2101z) &= \frac{1}{\lambda_1} (1 - e^{-\lambda_1 z}), \quad m(1011z) = \frac{1}{\lambda_2} (1 - e^{-\lambda_2 z}), \quad m(1322x) = x, \quad m(2232x) = x. \end{aligned} \quad (3)$$

Среднюю стационарную наработку на отказ  $T_+$ , среднее стационарное время восстановления  $T_-$  и стационарный коэффициент готовности найдем по формулам [4]:

$$T_+ = \frac{\int_{E_+} m(x) \rho(dx)}{\int_{E_+} P(x, E_-) \rho(dx)}, \quad T_- = \frac{\int_{E_-} m(x) \rho(dx)}{\int_{E_+} P(x, E_-) \rho(dx)}, \quad K_2 = \frac{T_+}{T_+ + T_-}, \quad (4)$$

где  $\rho(dx)$  – стационарное распределение ВЦМ  $\{\xi_n; n \geq 0\}$ ,  $m(x)$  – среднее время пребывания в состояниях системы;

$P(e, E_-)$  – вероятности переходов ВЦМ  $\{\xi_n; n \geq 0\}$  из работоспособных состояний в отказовые.

С учетом формул (1), (2) и (3) найдем выражения (4). Средняя стационарная наработка на отказ  $T_+$  и среднее стационарное время восстановления  $T_-$  имеет вид:

$$T_+ = \frac{1}{\lambda_1} \left( 1 - \int_0^{\infty} e^{-\lambda_1 t} r(t) dt \right) + \frac{1}{\lambda_2} \left( 1 - \int_0^{\infty} e^{-\lambda_2 t} r(t) dt \right) - \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} \left( 1 - \int_0^{\infty} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} r(t) dt \right),$$

$$T_- = M\gamma + M\delta - \frac{1}{\lambda_1} \left( 1 - \int_0^{\infty} e^{-\lambda_1 t} r(t) dt \right) - \frac{1}{\lambda_2} \left( 1 - \int_0^{\infty} e^{-\lambda_2 t} r(t) dt \right) +$$

$$+ \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} \left( 1 - \int_0^{\infty} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} r(t) dt \right) + M\beta_1 \left( 1 - \int_0^{\infty} e^{-\lambda_1 t} r(t) dt \right) + M\beta_2 \left( 1 - \int_0^{\infty} e^{-\lambda_2 t} r(t) dt \right) -$$

$$- M(\beta_1 \wedge \beta_2) \left( 1 - \int_0^{\infty} e^{-\lambda_1 t} r(t) dt - \int_0^{\infty} e^{-\lambda_2 t} r(t) dt + \int_0^{\infty} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} r(t) dt \right).$$

Стационарный коэффициент готовности найдем из соотношения:

$$K_2 = \left( \frac{1}{\lambda_1} \left( 1 - \int_0^{\infty} e^{-\lambda_1 t} r(t) dt \right) + \frac{1}{\lambda_2} \left( 1 - \int_0^{\infty} e^{-\lambda_2 t} r(t) dt \right) - \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} \left( 1 - \int_0^{\infty} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} r(t) dt \right) \right) / \left( M\gamma + M\delta + M\beta_1 \left( 1 - \int_0^{\infty} e^{-\lambda_1 t} r(t) dt \right) + M\beta_2 \left( 1 - \int_0^{\infty} e^{-\lambda_2 t} r(t) dt \right) - M(\beta_1 \wedge \beta_2) \left( 1 - \int_0^{\infty} e^{-\lambda_1 t} r(t) dt - \int_0^{\infty} e^{-\lambda_2 t} r(t) dt + \int_0^{\infty} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} r(t) dt \right) \right).$$

Найдем экономические характеристики исследуемой системы:  $S$  – среднюю удельную прибыль в единицу календарного времени,  $C$  – средние удельные затраты в единицу времени исправного функционирования системы по формулам:

$$S = \frac{E}{E} \frac{\int m(e) f_s(e) \rho(de)}{\int m(e) \rho(de)}, \quad C = \frac{E}{E_+} \frac{\int m(e) f_c(e) \rho(de)}{\int m(e) \rho(de)},$$

здесь  $f_s(e), f_c(e)$  – функции, определяющие соответственно доход и затраты в каждом состоянии.

Пусть  $c_1$  – прибыль, получаемая в единицу времени функционирования компонентов;  $c_2$  – затраты в единицу времени восстановления компонентов;  $c_3$  – затраты в единицу времени на контроль;  $c_4$  – потери в единицу времени от скрытого отказа. Тогда функции  $f_s(e), f_c(e)$  имеют следующий вид:

$$f_s(e) = \begin{cases} c_1, e \in \{3111, 2101z, 1011z\}, \\ -c_2, e \in \{3232, 3222, 3322, \\ \quad 1322x, 2232x\}, \\ -c_3, e \in \{3030, 3330, 3000, 3300\}, \\ -c_4, e \in \{2001z, 1001z\}, \end{cases} \quad f_c(e) = \begin{cases} 0, e \in \{3111, 2101z, 1011z\}, \\ c_2, e \in \{3232, 3222, 3322, \\ \quad 1322x, 2232x\}, \\ c_3, e \in \{3030, 3330, 3000, 3300\}, \\ c_4, e \in \{2001z, 1001z\}. \end{cases} \quad (5)$$

С учетом формул (2), (3) и (5) средняя удельная прибыль и средние удельные затраты определяются соотношениями:

$$S = \left[ (c_1 + c_4) \left( \frac{1}{\lambda_1} \left( 1 - \int_0^{\infty} e^{-\lambda_1 t} r(t) dt \right) + \frac{1}{\lambda_2} \left( 1 - \int_0^{\infty} e^{-\lambda_2 t} r(t) dt \right) - \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} \left( 1 - \int_0^{\infty} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} r(t) dt \right) \right) - c_3 M\gamma - c_4 M\delta - c_2 \left( M\beta_1 \left( 1 - \int_0^{\infty} e^{-\lambda_1 t} r(t) dt \right) + M\beta_2 \left( 1 - \int_0^{\infty} e^{-\lambda_2 t} r(t) dt \right) - M(\beta_1 \wedge \beta_2) \left( 1 - \int_0^{\infty} e^{-\lambda_1 t} r(t) dt - \int_0^{\infty} e^{-\lambda_2 t} r(t) dt + \int_0^{\infty} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} r(t) dt \right) \right) \right] /$$

$$\begin{aligned} & \left/ \left[ M\gamma + M\delta + M\beta_1 \left( 1 - \int_0^{\infty} e^{-\lambda_1 t} r(t) dt \right) + M\beta_2 \left( 1 - \int_0^{\infty} e^{-\lambda_2 t} r(t) dt \right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - M(\beta_1 \wedge \beta_2) \left( 1 - \int_0^{\infty} e^{-\lambda_1 t} r(t) dt - \int_0^{\infty} e^{-\lambda_2 t} r(t) dt + \int_0^{\infty} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) t} r(t) dt \right) \right] \right/ \\ C = & \left[ c_3 M\gamma + c_4 \left( M\delta + \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} \left( 1 - \int_0^{\infty} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) t} r(t) dt \right) - \frac{1}{\lambda_1} \left( 1 - \int_0^{\infty} e^{-\lambda_1 t} r(t) dt \right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{\lambda_2} \left( 1 - \int_0^{\infty} e^{-\lambda_2 t} r(t) dt \right) \right) \right] + c_2 \left[ M\beta_1 \left( 1 - \int_0^{\infty} e^{-\lambda_1 t} r(t) dt \right) + M\beta_2 \left( 1 - \int_0^{\infty} e^{-\lambda_2 t} r(t) dt \right) - \right. \\ & \left. - M(\beta_1 \wedge \beta_2) \left( 1 - \int_0^{\infty} e^{-\lambda_1 t} r(t) dt - \int_0^{\infty} e^{-\lambda_2 t} r(t) dt + \int_0^{\infty} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) t} r(t) dt \right) \right] \left/ \right. \\ & \left. \left/ \left[ \frac{1}{\lambda_1} \left( 1 - \int_0^{\infty} e^{-\lambda_1 t} r(t) dt \right) + \frac{1}{\lambda_2} \left( 1 - \int_0^{\infty} e^{-\lambda_2 t} r(t) dt \right) - \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} \left( 1 - \int_0^{\infty} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) t} r(t) dt \right) \right] \right. \end{aligned}$$

Для случая неслучайной периодичности контроля  $\tau > 0$  с учетом, что  $R(t) = 1(t - \tau)$ , где  $\tau = const$ ,  $M\delta = \tau$ , также получены формулы, которые позволяют находить оптимальные значения стационарных характеристик при различных исходных данных и оптимальную периодичность контроля. Исходные данные и результаты вычислений сведены в таблицу, средние ВВ:  $M\beta_1 = 0,100$  ч,  $M\beta_2 = 0,066$  ч, длительность контроля  $M\gamma = 0,125$  ч,  $c_1 = 5$  у.е.,  $c_2 = 4$  у.е.,  $c_3 = 3$  у.е.,  $c_4 = 2$  у.е.

Таблица. Оптимальная периодичность контроля

Исходные данные		Результаты вычислений					
$M\alpha_1$ , ч	$M\alpha_2$ , ч	$\tau_{onm}$ , ч	$K_2(\tau_{onm})$	$\tau_{onm}^s$ , ч	$S(\tau_{onm}^s)$ , у.е./ч	$\tau_{onm}^c$ , ч	$C(\tau_{onm}^c)$ , у.е./ч
90	70	11,144	0,981	12,187	4,846	14,207	0,06
90	50	10,016	0,979	10,96	4,828	12,785	0,067
90	10	6,37	0,964	7,028	4,706	8,294	0,115

**Выводы и перспективы дальнейших исследований.** Полученные результаты могут быть использованы для оптимизации процесса контроля-восстановления.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Автоматизация процессов машиностроения: учеб. пособие для машиностр. спец. вузов / Я. Буда, В. Гановски, В.С. Вихман и др.; под ред. А.И. Дашенко. – М.: Высш. шк., 1991. – 480 с.
2. Половко А.М. Основы теории надежности / А.М. Половко, С.В. Гуров. – 2-е изд., перераб.и доп. – СПб.: БХВ-Петербург, 2006. – 704 с.
3. Черкесов Г.Н. Надежность аппаратно-программных комплексов / Г.Н. Черкесов. – СПб.: Изд-во «Питер», 2005. – 479 с.
4. Корлат А.Н. Полумарковские модели восстанавливаемых систем и систем массового обслуживания / А.Н. Корлат, В.Н. Кузнецов, А.Ф. Турбин. – Кишинёв: Штиинца, 1991. – 209 с.

ОБЖЕРИН Юрий Евгеньевич – д.т.н., профессор, заведующий кафедрой высшей математики Севастопольского национального технического университета.

Научные интересы:

- математическое моделирование физических и технологических процессов и технических систем.

БОЙКО Елена Георгиевна – к.т.н., доцент кафедры высшей математики Севастопольского национального технического университета.

Научные интересы:

- математическое моделирование физических и технологических процессов и технических систем.