УДК 532.595

У.Е. Огородник, Е.А. Стрельникова, Ю.С. Шувалова

СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЗАДАЧЕ О КОЛЕБАНИЯХ ОБОЛОЧКИ С ЖИДКОСТЬЮ

Постановка проблемы. Катастрофические последствия крупнейших землетрясений последних лет привлекли внимание к теоретическим работам, посвященным оценке и мониторингу аварийного риска при эксплуатации резервуаров с легковоспламеняющимися заполнителями, как при сейсмических воздействиях, так и при внештатных ситуациях на производстве.

Будем моделировать резервуары тонкими упругими оболочками, содержащими жидкость. Рассматривается задача о действии импульсных нагрузок на оболочку вращения с произвольным разветвленным меридианом при частичном заполнении идеальной несжимаемой жидкостью.

Матричное уравнение движения оболочки, частично заполненной жидкостью, запишем в виде

$$\boldsymbol{LU}+\boldsymbol{M\ddot{U}}=P_l+Q\,, \qquad (1)$$

где L, M – матрицы жесткости и масс; $\boldsymbol{U}=(u_1,\ u_2,\ u_3)$ – вектор-функция перемещений; $Q(t)$ – вектор внешней нагрузки, $P(t)$ – гидродинамическое давление жидкости. Давление жидкости находим из интеграла Коши–Лагранжа, который в линейном приближении имеет вид

$$\frac{P}{\rho_l}=-\frac{\partial\phi}{\partial t}-gz+\frac{P_0}{\rho_l}-a_s(t)x\,, \qquad (2)$$

где ρ_l – плотность жидкости; z – координата точки жидкости, отсчитываемая в вертикальном направлении, g – ускорение свободного падения, $a_s(t)$ - ускорение горизонтального сейсма.

Обозначим смоченную поверхность оболочки через S_1, а свободную поверхность S_0. Пусть декартова система координат $0xyz$ связана с оболочкой; свободная поверхность жидкости S_0 в состоянии покоя совпадает с плоскостью $x0y$. Считаем, что резервуар с жидкостью подвергается динамическому воздействию. На смоченной поверхности упругой оболочки требуем выполнения условия непротекания, на свободной поверхности задаем динамическое и кинематическое граничные условия. Динамическим граничным условием является равенство давления жидкости на свободной поверхности атмосферному давлению, а кинематическое условие заключается в требовании принадлежности свободной поверхности во все время движения тех частиц жидкости, которые первоначально находились на ней.

Таким образом, получаем следующую краевую задачу

$$\boldsymbol{LU}+\boldsymbol{M\ddot{U}}+\rho_l\dot{\phi}+gz+a_s(t)x=Q\,;$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n}=\frac{\partial w}{\partial t},\ P\in S_1;\quad \frac{\partial\phi}{\partial n}=\dot{\zeta},\ P\in S_0;\quad \dot{\phi}+g\zeta+a_s(t)=0,\ P\in S_0$$

для определения неизвестных функций $\boldsymbol{U}$ и ϕ.

Анализ публикаций по теме исследования. Оценка сейсмического воздействия при проектировании резервуаров для хранения различных жидкостей – сложная инженерная проблема, которой посвящено большое количество публикаций [1-7]. В настоящее время для сейсмического анализа и проектирования резервуаров, как правило, используются методы, основанные на многокомпонентной пружинно-массовой аналогии Хауснера. Этот подход позволяет рассмотреть сложное динамическое поведение резервуара и его содержимого в упрощенной форме. для проведения исследования прочности и устойчивости резервуаров при импульсных и сейсмических нагрузках принимаются упрощенные гипотезы. Предполагается, например, что жидкость состоит из двух частей: движущейся вместе с емкостью как жесткое целое и части, движущейся со своей собственной частотой. Определение границ этих частей жидкости производится эмпирически. Не учитывается также упругость стенок резервуара. Отсутствуют работы, в которых бы учитывалась геометрическая нелинейность материала и нелинейный характер поведения жидкости. Даже в стандарте EUROCODE 8 [8] принимается аналогичная упрощенная схема расчета сейсмического отклика. Нами предложен подход, основанный на использовании метода граничных элементов, для решения задачи о собственных колебаниях упругих оболочек вращения, заполненных жидкостью, и для решения задачи о собственных колебаниях жидкости в жестких резервуарах. Этот подход имеет определенные преимущества. В разрешающих уравнениях функции и их производные определяются только на границах области, что позволяет существенно уменьшать размерность систем уравнений. Этот метод дает также качественно новые возможности в моделировании связанной динамической задачи, именно он и будет применен в данном исследовании.

Цель статьи. Целью данного исследования является разработка метода расчета частот и форм колебаний упругих оболочек, содержащих жидкость. Метод основан на применении теории потенциала, что привело к необходимости численного решения систем сингулярных уравнений.

Метод решения динамической задачи для оболочки, частично заполненной жидкостью.

Будем искать собственные формы колебаний оболочки в жидкости в следующем виде

$$\vec{U}(x,y,z,t)=\sum_{k=1}^{m}c_k(t)\boldsymbol{u}_k(x,y,z) \quad (3)$$

где функции $u_k(x,y,z)$ – собственные формы колебаний оболочки в вакууме, $c_k(t)$ – неизвестные коэффициенты. Потенциал скоростей φ представим в виде суммы двух потенциалов $\varphi=\varphi_1+\varphi_2$. Для определения ϕ_1 сформулируем следующую краевую задачу:

$$\nabla^2\varphi_1=0, \qquad \frac{\partial\varphi_1}{\partial n}=\frac{\partial w}{\partial t},\ M\in S, \qquad \frac{\partial\varphi_1}{\partial t}=0,\ M\in S \quad (4)$$

Здесь $w(x,y,z,t)=\sum_{k=1}^{m}w_k(x,y,z)c_k(t)$, функции $w_k(x,y,z)$ - нормальные компоненты собственных форм колебаний пустой оболочки.

Отметим, что из соотношения (3) и второго из уравнений (4) следует, что

$$\varphi_1(x,y,z,t)=\sum_{k=1}^{m}\varphi_{1k}(x,y,z)\dot{c}_k(t).$$

Для определения функций φ_{1k} имеем m краевых задач, аналогичных (4):

Потенциал ϕ_2 ищем в виде

$$\phi_2(x,y,z,t)=\sum_{k=1}^{n}d_k(t)\phi_{2k}(x,y,z),$$

где функции ϕ_{2k} – собственные формы колебаний жидкости в жестком сосуде.

Для определения потенциала φ_2 сначала рассмотрим вспомогательную задачу о колебаниях жидкости в жестком сосуде с учетом силы гравитации. Такая задача описывается следующими уравнениями

$$\nabla^2\Psi=0,\ \frac{\partial\Psi}{\partial n}=0,\ M\in S_1,\ \frac{\partial\Psi}{\partial n}=\dot{\zeta},\ M\in S_0,\ \dot{\Psi}+g\zeta=0,\ M\in S_0.$$

Последнее уравнение здесь представляет собой динамическое условие (равенство давления атмосферному) на свободной поверхности. Дифференцируя это уравнение по t и учитывая третье соотношение, получим

$$\ddot{\Psi}+g\frac{\partial\Psi}{\partial n}=0,\ M\in\sigma_0. \quad (5)$$

Рассмотрим задачу (5) как проблему собственных значений и будем искать ее решение в виде

$$\Psi(x,y,z,t)=e^{i\kappa t}\psi(x,y,z).$$

Для функции ψ имеем следующую задачу о гармонических колебаниях жидкости в жестком сосуде:

$$\nabla^2\psi=0,\ \frac{\partial\psi}{\partial n}=0,\ M\in S,\ \frac{\partial\psi}{\partial n}=\frac{\kappa^2}{g}\psi,\ M\in\sigma_0.$$

Решая эту задачу, получим ряд собственных значений κ_k и соответствующих им собственных функций, которые обозначим φ_{2k}. Далее, после решения этой вспомогательной задачи ищем потенциал φ_2 в виде

$$\varphi_2(x,y,z,t)=\sum_{k=1}^{n}\dot{d}_k(t)\varphi_{2k}(x,y,z).$$

Окончательно, приходим к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных коэффициентов $c_k(t),\ \ k=1,...,m$, $d_k(t),\ \ k=1,...,n$:

$$\ddot{c}_j(t)+\omega_j^2c_j(t)+\rho_l\sum_{k=1}^{m}\ddot{c}_k(\varphi_{1k},w_j)+$$
$$+\rho_l\left[\sum_{i=1}^{n}\ddot{d}_i(\varphi_{2i},w_j)+g(z,w_j)+a_s(t)(x,w_j)\right]=(Q,\boldsymbol{u}_j),\ j=1,m \quad (6)$$

$$\ddot{d}_l(t)+\kappa_l^2d_l(t)+\frac{g}{(\varphi_{2l},\varphi_{2l})}\sum_{k=1}^{m}\dot{c}_k(t)\left(\frac{\partial\varphi_{1k}}{\partial n},\varphi_{2l}\right)+a_s(t)(x,\varphi_l)=0,\quad l=1,2..,n$$

Поскольку предполагается, что в начальный момент времени (например, до начала землетрясения) система «оболочка-жидкость» покоилась, то принимаются нулевые начальные условия

$$c_k(0)=\dot{c}_k(0)=0,\quad k=1,...,m;\quad d_k(0)=\dot{d}_k(0)=0,\quad k=1,...,n. \tag{7}$$

Таким образом, схема решения связанной динамической задачи для оболочки вращения, частично заполненной жидкостью, состоит из следующих этапов. Каждый из них представляет собой самостоятельный интерес.

1. Определение частот и форм свободных колебаний оболочки в вакууме методом конечных элементов.
2. Определение частот и форм колебаний жидкости в жесткой оболочке под действием силы тяжести с использованием метода граничных элементов.
3. Определение частот и форм колебаний упругой оболочки без учета действия силы тяжести с использованием метода граничных элементов.
4. Решение системы дифференциальных уравнений второго порядка с использованием метода Рунге-Кутта 4го и 5го порядка.

Задачи определения частных потенциалов сводятся к решению систем сингулярных интегральных уравнений.

Опишем решение смешанной задачи для уравнения Лапласа (4).

Будем искать гармоническую функцию φ в виде суммы потенциалов простого и двойного слоев, т. е. используем прямую формулировку метода граничных интегральных уравнений.

$$2\pi\varphi(P_0)=\iint\limits_S \frac{\partial\varphi}{\partial n}\frac{1}{|P-P_0|}dS-\iint\limits_S \varphi\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{|P-P_0|}dS \tag{8}$$

Здесь предполагается, что $S = S_1 \cup S_0$; точки P и P_0 принадлежат поверхности S. (поэтому перед φ множитель 2π, а не 4π).

Величина $|P-P_0|$ представляет собой декартово расстояние между точками P и P_0.

Для смешанной задачи (4) представление (8) приводит к следующей системе сингулярных интегральных уравнений:

$$\begin{gathered}2\pi\varphi(P_0)+\iint\limits_{S_1}\varphi\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{|P-P_0|}dS_1-\iint\limits_{S_0}q\frac{1}{|P-P_0|}dS_0=\iint\limits_{S_1}w\frac{1}{|P-P_0|}dS_1;\quad P_0\in S_1\\ \iint\limits_{S_1}\varphi\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{|P-P_0|}dS_1-\iint\limits_{S_0}q\frac{1}{|P-P_0|}dS_0=\iint\limits_{S_1}w\frac{1}{|P-P_0|}dS_1;\quad P_0\in S_0\end{gathered} \tag{9}$$

относительно неизвестных функций φ и q.

Поскольку S_1 – оболочка вращения, то функцию w представляют в виде

$$w=w(r,z)\cos\alpha\theta \tag{10}$$

где (r,z,θ) – цилиндрические координаты, α – заданное целое число (количество узловых диаметров). Будем искать решение системы интегральных уравнений (4.2) в виде $\varphi=\varphi(r,z)\cos\alpha\theta;\quad q=q(r,z)\cos\alpha\theta$.

С учетом полученных формул устанавливаем, что система (9) принимает вид

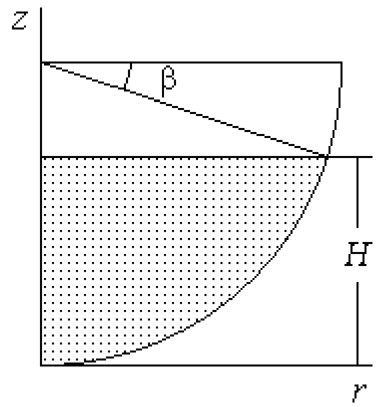
$$\begin{gathered}2\pi\varphi(z_0)+\int\limits_\Gamma\varphi(z)Q(z,z_0)r(z)d\Gamma-\int\limits_0^R q(\rho)\Psi(P,P_0)\rho d\rho=\int\limits_\Gamma w(z)\Psi(P,P_0)r(z)d\Gamma_1;P_0\in S_1\\ \int\limits_\Gamma\varphi(z)Q(z,z_0)r(z)d\Gamma-\int\limits_0^R q(\rho)\Psi(P,P_0)\rho d\rho=\int\limits_\Gamma w(z)\Psi(P,P_0)r(z)d\Gamma_1;\ P_0\in S_0.\end{gathered} \tag{11}$$

Здесь

$$Q(z,z_0)=\frac{4}{\sqrt{a+b}}\left\{\frac{1}{2r}\left[\frac{r^2-r_0^2+(z_0-z)^2}{a-b}\mathsf{E}_\alpha(k)-\mathsf{F}_\alpha(k)\right]n_r+\frac{z_0-z}{a-b}\mathsf{E}_\alpha(k)n_z\right\};\Psi(P,P_0)=\frac{4}{\sqrt{a+b}}\mathsf{F}_\alpha(k).$$

Для численного решения системы (11) использован метод граничных элементов с постоянной аппроксимацией плотности на элементе. Элементы в данном случае – это участки образующей. На не особых элементах используются стандартные квадратурные формулы Гаусса, на особых применяются аналитические формулы для вычисления интегралов с логарифмической особенностью.

В качестве примера рассматривается полусферическая оболочка, заполненная жидкостью при различных уровнях H (рис. 1). Параметры оболочки изменены по сравнению с приведенными выше: радиус R=2.54 м, толщина h=0.0254 м, модуль упругости E=10 ГПа ($0.1\cdot10^{11}$ Па), коэффициент Пуассона ν=0.3, плотность материала ρ=2770 кг/м^3. Плотность жидкости – 1000 кг/м^3. Условия закрепления – шарнирное опирание по контуру оболочки.



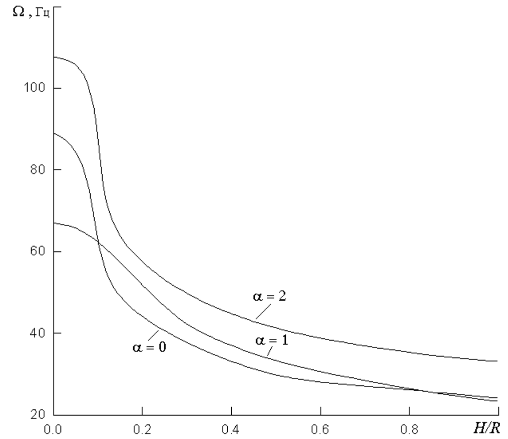


Рис. 1.Полусферическая оболочка Рис.2. Влияние уровня заполнения на частоты

На основе численного решения системы сингулярных уравнений и проблемы собственных значений построены графики изменения низшей собственной частоты, которые показаны на рис. 2.

Выводы и перспективы дальнейших исследований. Разработан метод решения задачи определения частот и форм колебаний оболочки вращения, частично заполненной жидкостью. Метод позволяет изучать также импульсные и сейсмические воздействия на резервуар с жидкостью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kubenko V.D., Koval'chuk P.S. Nonlinear problems of the dynamics of elastic shells partially filled with a liquid // International Journal of Applied Mechanics. – 2000. – 36(4). – pp. 421-448.
2. Amabili M., Païdoussis M. P. Review of studies on geometrically nonlinear vibrations and dynamics of circular cylindrical shells and panels, with and without fluid-structure interaction // Applied Mechanics Review.–2003. – 56(4). – pp. 349-381.
3. Kumar V., Ganesan, N. Dynamic analysis of conical shells conveying fluid // Journal of Sound and Vibration. – 2008. – 310(1-2). – pp. 38-57.
4. Malhotra P. K. New method for seismic isolation of liquid-storage tanks // Journal of Earthquake Engineering and Structural Dynamics. – 1997. –26(8).– pp. 839-847.
5. Sanchez-Sanchez H., Cortes S.C., Dominguez A.M. Structural behaviour of liquid filled storage tanks of large capacity placed in seismic zones of high risk in Mexico // Proc. of 13th World Conference on Earthquake Engineering. – Vancouver, B.C., Canada. – 2004. – Paper № 2665.
6. Sanchez-Sanchez H., Cortes S.C. Seismic response of cylindrical tanks for oil // Proc. of 14th World Conference on Earthquake Engineering. – China, 2008.
7. Jhung M.J., Jo J.C., Jeong S.J. Impact analysis of a water storage tank // Nuclear Engineering and Technology. – 2006. – Vol. 38, № 7.
8. EUROCODE 8. Design provisions of earthquake resistance of structures, Part 4., Silos, tanks and pipeline. European Committee for Standartization, Brussels, 1998, 220 p.

ОГОРОДНИК Ульяна Евгеньевна – аспирант Института проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины.

Научные интересы:

- методы численного анализа прочности конструкций, численные методы решения интегральных уравнений, механика разрушения.

СТРЕЛЬНИКОВА Елена Александровна – доктор технических наук, профессор, ведущий научный сотрудник Института проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины.

Круг научных интересов:

- сингулярные и гиперсингулярные интегральные уравнения, гидроупругость, метод дискретных особенностей

ШУВАЛОВА Юлия Сергеевна – доцент Украинской государственной железнодорожной академии.

Круг научных интересов:

- численные методы решения интегральных уравнений в задачах динамики пластин и оболочек, методы компьютерного моделирования, методика преподавания фундаментальных дисциплин в высшей школе.