УДК 514.12

Е.В. Стеганцев

РАСПОЗНАВАНИЕ ТИПА КРИВОЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА ПО ЕЕ ПРООБРАЗУ ПРИ СТЕРЕОГРАФИЧЕСКОЙ ПРОЕКЦИИ

Постановка задачи. Рассмотрим сферу в трехмерном евклидовом пространстве. Зафиксируем одну из ее точек P. Построим плоскость σ, перпендикулярную диаметру, проходящему через точку P. Каждой точке M сферы (кроме точки P) поставим в соответствие точку N плоскости σ, являющуюся пересечением прямой PM с этой плоскостью. Такое центральное проектирование принято называть стереографической проекцией сферы на плоскость.

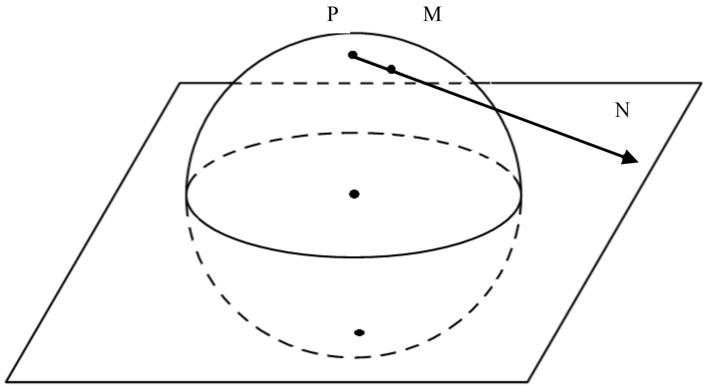

Рис. 1 Стереографическая проекция

Выберем плоскость σ так, чтобы она проходила через центр сферы (рис. 1). Приведем одно из трех наиболее известных свойств стереографической проекции [4], которое будет использоваться в статье.

Свойство. Проекциями окружностей, которые лежат на сфере, и не проходят через центр проекции, являются окружности на плоскости σ. Если окружности на сфере проходят через центр проекции, то их проекциями являются прямые на плоскости σ.

Выберем декартову систему координат с центром в центре сферы, тогда плоскость σ имеет уравнение $Z = 0$. Любая окружность сферы (прообраз окружности на плоскости $Z = 0$) может быть задана системой уравнений

$$\begin{cases} F(X,Y,Z) = 0, \\ X^2 + Y^2 + Z^2 = 1, \end{cases} \tag{1}$$

где F - линейный многочлен от переменных X, Y, Z, то есть окружность является пересечением некоторой плоскости со сферой. Поскольку других плоских кривых (кроме окружностей) на сфере нет, то понятно, что прообразами кривых второго порядка, отличных от окружности, есть неплоские кривые. Любая сферическая кривая задается системой уравнений (1), где F - некоторая функция от переменных X, Y, Z. Возникает вопрос, какой вид должна иметь функция F для того, чтобы система уравнений (1) задавала сферическую кривую, являющуюся прообразом отличной от окружности кривой второго порядка при стереографической проекции.

Анализ публикаций по теме исследования. Определение и основные свойства стереографической проекции рассмотрены в работе [4]. Также в этой работе авторами рассмотрены некоторые ее применения. Несколько другой подход к стереографической проекции дан в книге [2]. В этой же работе описаны свойства сферической метрики, напрямую связанные с рассматриваемым видом проектирования.

Цель статьи. Получить критерии распознавания типа кривой второго порядка на плоскости $Z = 0$ по ее прообразу на сфере.

Основная часть. Стереографическая проекция является взаимнооднозначным отображением сферы с выколотой точкой на плоскость, проходящую, например, через центр сферы. Координаты X, Y, Z точки на сфере связаны с координатами x, y ее образа на плоскости $Z = 0$ формулами

$$x = \frac{X}{1-Z},\ y = \frac{Y}{1-Z},\ Z \neq 1. \qquad (2)$$

Рассмотрим вначале свойство точек прообраза кривой второго порядка, касающееся их расположения на сфере.

Теорема. Если кривая на сфере является прообразом эллипса, то существует такая окрестность точки $P(0,0,1)$ на сфере, что в этой окрестности нет ни одной точки прообраза.

Идею доказательства этой теоремы продемонстрируем на примере эллипса, имеющего центр в начале координат и заданного каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (3)$$

Покажем, что рассмотрение такого случая достаточно для доказательства. Пусть эллипс расположен на плоскости $Z = 0$ так, что выбранная нами система координат для него не является канонической. Тогда, "охватим" этот эллипс другим таким эллипсом, который относительно нашей системы координат имеет каноническое уравнение. Пример одного такого «охвата» дает рис. 2.

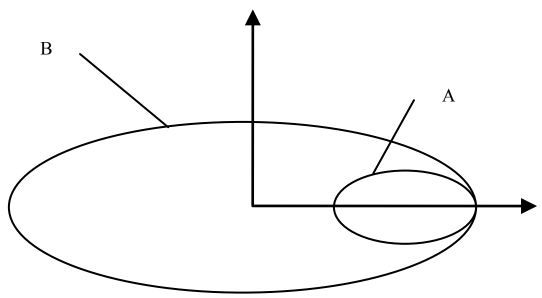

Рис. 2. "Охват" эллипса

Тот факт, что если теорема справедлива для эллипса, заданного уравнением (3), то она справедлива и для любого «охваченного» им эллипса, следует из простого, достаточно очевидного, свойства стереографической проекции: чем дальше точка на плоскости $Z = 0$ удаляется от центра сферы, тем ближе ее прообраз приближается к центру проектирования. Итак, докажем теорему для эллипса, заданного уравнением (3).

Первое уравнение системы (1), задающей прообраз этого эллипса, получаем после подстановки в уравнение (3) формул (2) и умножения на знаменатель $(1-Z)^2$. Вторым уравнением будет уравнение сферы. Итак

$$\begin{cases} b^2X^2 + a^2Y^2 - a^2b^2(1-Z)^2 = 0, Z \neq 1, \\ X^2 + Y^2 + Z^2 = 1. \end{cases} \qquad (4)$$

Пересечем сферу плоскостью $Z = 1 - \varepsilon$. Получим систему уравнений

$$\begin{cases} b^2X^2 + a^2Y^2 - a^2b^2(1-Z)^2 = 0, \\ X^2 + Y^2 + Z^2 = 1, Z \neq 1, \\ Z = 1 - \varepsilon,\ \varepsilon > 0. \end{cases} \qquad (5)$$

Покажем, что эта система не имеет решений в некоторой окрестности точки $P(0,0,1)$. Действительно, после нахождения Y^2

$$Y^2 = \frac{b^2\varepsilon^2(a^2+1) - 2b^2\varepsilon}{(a^2 - b^2)},$$

нужно рассмотреть два случая: $a^2 - b^2 > 0$ и $a^2 - b^2 < 0$. Первый из этих случаев дает $\varepsilon < \frac{2}{a^2+1}$.

Таким образом, в ε - окрестности точки $P(0,0,1)$ при $\varepsilon \in \left(0; \dfrac{2}{a^2+1}\right)$ система (5) не имеет решений, то есть в этой окрестности нет ни одной точки кривой (4). Аналогично, во втором случае такая окрестность тоже найдется, а именно, при $\varepsilon \in \left(0; \dfrac{a^2}{1+b^2}\right)$ система уравнений (5) не имеет решений.

Пример кривой на сфере дает система уравнений

$$\begin{cases} X^2 + 8Y^2 - 4(1-Z)^2 = 0, \\ X^2 + Y^2 + Z^2 = 1,\ Z \neq 1. \end{cases}$$

При $\varepsilon \in \left(0; \dfrac{2}{5}\right)$ она не имеет решений. Таким образом, согласно теореме кривая, определяемая этой системой, может быть прообразом эллипса.

Сформулируем аналогичное свойство для гиперболы и параболы. Его доказательство проводится таким же образом, поэтому здесь мы не будем на нем останавливаться.

Теорема. Если кривая на сфере является прообразом гиперболы или параболы, то в любой окрестности точки $P(0,0,1)$ на сфере существуют точки прообраза.

Приступим теперь к основной задаче - определение вида функции F в системе уравнений (1), задающей прообраз отличной от окружности кривой второго порядка при стереографической проекции. Находя уравнение прообраза для конкретных кривых второго порядка с помощью формул (2), мы получали F как многочлен второй степени относительно переменных X, Y, Z. Естественно предположить, что множество точек сферы, декартовы координаты которых удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} F(X,Y,Z) = 0,\ Z \neq 1, \\ X^2 + Y^2 + Z^2 = 1, \end{cases} \tag{7}$$

где $F(X,Y,Z)$ - многочлен второй степени, является прообразом отличной от окружности кривой второго порядка. Но уже первые примеры заставляют обратить внимание еще на одну особенность этого многочлена. В силу биективности стереографической проекции можно найти формулы, обратные к формулам (2), то есть формулы для нахождения образа точки при стереографической проекции сферы на плоскость, они имеют вид

$$X = \frac{2x}{x^2+y^2+1},\ Y = \frac{2y}{x^2+y^2+1},\ Z = \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}, \tag{8}$$

где X, Y, Z - координаты точки на сфере, а x, y - координаты ее образа на плоскости $Z = 0$. Из этих формул ясно, что многочлен $F(X,Y,Z)$ не может быть произвольным многочленом второй степени. Вывод о виде этого многочлена легко получается, если заметить, что последняя из формул (8) дает

$$1 - Z = \frac{2}{x^2+y^2+1}.$$

Заметим также, что система уравнений (7) может иметь несколько равносильных видов, переход от одного из которых к другому осуществляется с помощью известных элементарных преобразований. Например, если система (7) имеет вид $\begin{cases} X^2 + 8Y^2 + 2 + 2Z = 0, \\ X^2 + Y^2 + Z^2 = 1,\ Z \neq 1, \end{cases}$ то можно перейти к равносильной ей системе $\begin{cases} 2X^2 + 9Y^2 + (1-Z)^2 = 0, \\ X^2 + Y^2 + Z^2 = 1,\ Z \neq 1, \end{cases}$ заменив первое уравнение суммой первого и второго уравнений. Проведенные рассуждения позволяют сформулировать следующий факт.

Теорема. Для того, чтобы система уравнений (7) задавала на сфере прообраз при стереографической проекции отличной от окружности кривой второго порядка, необходимо и достаточно, чтобы либо функция F была однородным многочленом второй степени относительно $X,\ Y,\ 1-Z$, либо можно было с помощью элементарных преобразований перейти к системе уравнений, равносильной системе (7), для которой указанное свойство выполняется.

И, наконец, выясним, как по указанному прообразу определить вид самой кривой второго порядка на плоскости $Z=0$. Найдем образ на плоскости $Z=0$ сферической кривой, заданной системой уравнений

$$\begin{cases} a_{11}X^2 + a_{22}Y^2 + a_{33}(1-Z)^2 + 2a_{12}XY + 2a_{13}X(1-Z) + 2a_{23}Y(1-Z) = 0, \\ X^2 + Y^2 + Z^2 = 1, \\ Z \neq 1. \end{cases} \qquad (9)$$

Для этого подставим в первое уравнение системы (9) формулы (8). После элементарных преобразований получим уравнение

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + 1 = 0 \qquad (10)$$

кривой второго порядка на плоскости $Z=0$. Тип этой кривой (эллиптическая, параболическая, гиперболическая) определяется детерминантом $\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$. Если же кроме этого определитель $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ отличен от нуля, то кривая (10) будет невырожденной. Но поскольку коэффициенты в уравнении (10) такие же как и в первом уравнении системы (9), то тип образа мы можем определить, не переходя к его уравнению, а пользуясь только уравнением прообраза. То есть может быть сформулирована следующая

Теорема. Система уравнений (9) задает прообраз эллипса (параболы, гиперболы) тогда и только тогда, когда число $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ отлично от нуля, а число $\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ положительно (равно нулю, отрицательно).

Выводы и перспективы дальнейших исследований. Исследовать дифференциально-геометрические свойства кривых на сфере, которые являются прообразами эллипса, гиперболы и параболы.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Дубровин Б.А. Современная геометрия. Методы и приложения [Текст] / Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко. – М.: Наука, 1986. – 760 с.
2. Мищенко А.С. Курс дифференциальной геометрии и топологии [Текст] / А.С. Мищенко, А.Т. Фоменко. – М.: Изд - во Моск. ун –та, 1980. –439 с.
3. Энциклопедия элементарной математики. Книга четвертая – геометрия. [Текст] – М.: Физматгиз, 1963. – 568 с.
4. Розенфельд Б.А. Стереографическая проекция [Текст] / Б.А. Розенфельд, Н.Д. Сергеева. – М.: Наука, 1973. – 48 с.
5. Яглом И.М. Принцип относительности Галилея и неевклидова геометрия [Текст] / И.М. Яглом. – М.: Наука, 1969. – 304 с.
6. Дифференциальная геометрия, топология, тензорный анализ. Сборник задач. [Текст] / Н.И. Кованцов, Г.М. Зражевская, В.Г. Кочаровский, В.И. Михайловский. – К.: Выща школа, 1989.– 398 с.
7. Понарин Я.П. Неевклидовы геометрии с аффинной базой. Учебное пособие [Текст] / Я.П. Понарин. – Киров, 1991. 121 с.

СТЕГАНЦЕВ Евгений Викторович, к.ф.-м.н., доцент кафедры алгебры и геометрии Запорожского национального университета.

Научные интересы:

- теория упругости многослойных сред.