УДК.517.53.57

М. А. Сухорольський, І.С. Костенко, В.В. Достойна

ПОБУДОВА РОЗВ'ЯЗКІВ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ У ВИГЛЯДІ КОНТУРНИХ ІНТЕГРАЛІВ

Зведення крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь та рівнянь з частинними похідними до інтегральних рівнянь є одним з ефективних засобів формулювання числових методів побудови їх розв'язків. Використання методів теорії функцій комплексної змінної до розв'язання крайових задач і, відповідно, зображення розв'язків контурними інтегралами дозволяє одержати розв'язки в явному вигляді або в інтегральній формі. У роботах [1, 2] сформульовано загальний підхід до зображення розв'язків крайових задач контурними інтегралами і одержано розв'язки ряду задач для звичайних диференціальних та рівнянь з частинними похідними.

Розглянемо диференціальну форму k -го порядку в області $D \subset R$

$$Z(u) = \sum_{i=0}^{k}\sum_{l=0}^{k-i} f_i^l(x_1, x_2)\frac{\partial^{l+i}u}{\partial x_1^i \partial x_2^l}, \tag{1}$$

де $f_i^l(x_1, x_2)$ - неперервні функції з неперервними частинними похідними до k -го порядку в області D.

Помножимо форму (1) на функцію $v = v(x_1, x_2)$, неперервну з неперервними похідними до k -го порядку в області D, і знайдемо невизначені інтеграли за кожною змінною. Скориставшись формулою інтегрування з частинами

$$\iint v\, f_i^l \frac{\partial^{i+l}u}{\partial x_1^i \partial x_2^l} dx_1 dx_2 = (-1)^{i+l} \iint \frac{\partial^{i+l}\left(v\, f_i^l\right)}{\partial x_1^i \partial x_2^l} u dx_1 dx_2 +$$

$$+(-1)^i \int \sum_{g=0}^{l-1}(-1)^g \frac{\partial^{i+g}\left(v\, f_i^l\right)}{\partial x_1^i \partial x_2^g}\frac{\partial^{l-g-1}u}{\partial x_2^{l-g-1}} dx_1 + (-1)^l \int \sum_{j=0}^{i-1}(-1)^j \frac{\partial^{l+j}\left(v\, f_i^l\right)}{\partial x_1^j \partial x_2^l}\frac{\partial^{i-j-1}u}{\partial x_2^{i-j-1}} dx_2 +$$

$$+(-1)^{i+j}\sum_{j=0}^{i-1}\sum_{g=0}^{l-1}\frac{\partial^{j+g}\left(v\, f_i^l\right)}{\partial x_1^j \partial x_2^g}\frac{\partial^{i+l-j-g-2}u}{\partial x_1^{i-j-1}\partial x_2^{l-g-1}},$$

запишемо формулу Діріхлє

$$\iint v\, Z(u) dx_1 dx_2 = \iint u\, Z\;(v) dx_1 dx_2 + \int M_1(u,v) dx_1 + \int M_2(u,v) dx_2 + M(u,v), \tag{2}$$

де $Z\;(v) = \sum_{i=0}^{k}\sum_{l=0}^{k-i}(-1)^{i+l}\frac{\partial^{i+l}\left(v\, f_i^l\right)}{\partial x_1^i \partial x_2^l}$ - спряжена до $Z(u)$ форма;

$$M_1(u,v) = \sum_{i=0}^{k}\sum_{l=1}^{k-i}\sum_{g=0}^{l-1}(-1)^{i+g}\frac{\partial^{i+g}\left(v\, f_i^l\right)}{\partial x_1^i \partial x_2^g}\frac{\partial^{l-g-1}u}{\partial x_2^{l-g-1}},$$

$$M_2(u,v) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{l=0}^{k-i}\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^{l+j}\frac{\partial^{l+j}\left(v\, f_i^l\right)}{\partial x^j \partial x_2^l}\frac{\partial^{i-j-1}u}{\partial x_1^{i-j-1}},$$

$$M(u,v) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{l=1}^{k-i}\sum_{j=0}^{i-1}\sum_{g=0}^{l-1}(-1)^{i+l}\frac{\partial^{j+g}\left(v\, f_i^l\right)}{\partial x_1^j \partial x_2^g}\frac{\partial^{i+l-j-g-2}u}{\partial x_1^{i-j-1}\partial x_2^{l-g-1}}$$ - білінійні диференціальні форми.

Врахувавши формулу похідної добутку двох функцій, вираз спряженої форми запишемо ще так

$$Z\;(v) = \sum_{i=0}^{k}\sum_{l=0}^{k-i}\sum_{s=0}^{l}\sum_{r=0}^{i}(-1)^{i+l}C_l^s C_i^r \frac{\partial^{i+l-r-s}f_i^l}{\partial x_1^{i-r}\partial x_2^{l-s}}\frac{\partial^{r+s}v}{\partial x_1^r \partial x_2^s} =$$
$$\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{k-r}\left(\sum_{i=0}^{k-s-r}\sum_{l=0}^{k-s-r-i}(-1)^{r+s+i+l}C_{s+l}^s C_{i+r}^r \frac{\partial^{i+l}f_{i+r}^{l+s}}{\partial x_1^i \partial x_2^l}\right)\frac{\partial^{r+s}v}{\partial x_1^r \partial x_2^s} \tag{3}$$

Продиференціювавши рівність (2) спочатку по x_1, а потім – по x_2, одержимо тотожність Лагранжа

$$vZ(u) - uZ\; = \frac{\partial}{\partial x_1}M_1(u,v) + \frac{\partial}{\partial x_2}M_2(u,v) + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}M(u,v). \tag{4}$$

Одержані тотожності використано для побудови розв'язків крайових задач.

1. ЗОБРАЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ РІВНЯННЯ З ДВОМА ЗМІННИМИ У ВИГЛЯДІ КОНТУРНИХ ІНТЕГРАЛІВ

Розглянемо диференціальне рівняння з частинними похідними k -го порядку

$$L_{xx}(u) \equiv \sum_{i=0}^{k}\sum_{l=0}^{k-i} f_i^l(x_1, x_2)\frac{\partial^{l+i}u}{\partial x_1^i \partial x_2^l} = f(x_1, x_2), \tag{1.1}$$

де $f_i^l(x_1, x_2)$ - неперервні функції з неперервними частинними похідними до k -го порядку в $D \subset R^2$; $f(x_1, x_2)$ - неперервна функція в .

Розв'язки рівняння (9) шукаємо у вигляді контурного інтеграла

$$u(x_1, x_2) = \int_{\Gamma} K(x_1, x_2, z)\phi(z)\,dz, \tag{1.2}$$

де Γ - спрямлювана крива в комплексній площині; $\phi(z)$ - аналітична функція в деякому околі кривої Γ ; $K(x_1, x_2, z)$ - неперервна функція з неперервними частинними похідними за змінними x_1 *і* x_2 в D при кожному фіксованому $z \in G$. При цьому вважаємо, що існують інтеграли $\int_{\Gamma} \frac{\partial^{l+j} K}{\partial x_1^l \partial x_2^j}\phi(z)dz \quad (0 \le l+j \le k)$ і має місце формула

$$\frac{\partial^{l+j}}{\partial x_1^l \partial x_2^j}\int_{\Gamma} K(x_1, x_2, z)\phi(z)dz = \int_{\Gamma} \frac{\partial^{l+j} K}{\partial x_1^l \partial x_2^j}\phi(z)dz \quad .$$

Вважаємо також, що можна підібрати диференціальну форму

$$Z_z(u) = \sum_{i=0}^{m} g_i(z)\frac{\partial^i u}{\partial z^i} \tag{1.3}$$

і функцію $K_1(x_1, x_2, z)$, такі, що

$$L_{xx}(K) = Z_z(K_1) \quad , \tag{1.4}$$

де $g_i(z)$ - аналітичні функції в G; $K_1(x_1, x_2, z)$ - аналітична за змінною z для кожного фіксованого змінного $(x_1, x_2) \in$.

Тоді ліву частину рівняння (1.1) можна записати у вигляді

$$L_{xx}(u) = \int_{\Gamma} K(x_1, x_2, z) Z_z(\phi)\,dz + \int_{\Gamma} \frac{d}{dz} M_z(K_1, \phi)\,dz \quad . \tag{1.5}$$

Дійсно, в силу формули (4) для диференціальної форми $Z_z(K_1)$ матимемо тотожність

$$vZ_z(K_1) = K_1 Z_z(\phi) + \frac{d}{dz}M(K_1, \phi). \tag{1.6}$$

Спочатку, підставивши вираз (1.2) у ліву частину рівняння (1.1), а потім врахувавши формулу (1.6), отримаємо формулу (1.5).

Виберемо таку функцію $\phi(z)$, що справджується рівняння $Z_z(\phi) = 0$. (1.7)

Тоді ліва частина рівняння (1.1), що задається формулою (1.5), набуде вигляду $L_x(u) = \int_{\Gamma} \frac{d}{dz} M_z(K_1, \phi)dz$ і функція (1.2) буде розв'язком рівняння (1.1), якщо справджується рівність

$$\int_{\Gamma} \frac{d}{dz} M_z(K_1, \phi)dz = f(x_1, x_2) \quad . \tag{1.8}$$

Отже відшукання розв'язків рівняння (1.1) у формі (1.2) зводиться до: а) конструювання тотожності (1.4) і, відповідно, побудови диференціальної форми $Z_z(K_1)$; б) розв'язання рівняння (1.7); в) встановлення рівності (1.8).

Зауважимо, що рівність (1.8) перетворюється у тотожність, якщо $f(x_1, x_2) \equiv 0$ і Γ - замкнута крива, що охоплює хоч-би одну особливу точку функцій K_1 або ϕ.

2. ЗОБРАЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ОДНОРІДНОГО РІВНЯННЯ З ПОЛІНОМІАЛЬНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Розглянемо рівняння (1.1) з поліноміальними коефіцієнтами за умов $f\left(x_1,x_2\right)=0$, $f_i^l\left(x_1,x_2\right)=a_i^l x_2^{l+i}$, де a_i^l - дійсні числа. Запишемо це рівняння у вигляді

$$\boxed{L_{xx}(u)\equiv\sum_{i=0}^{k}\sum_{l=0}^{k-i}a_i^l x_2^{l+i}\frac{\partial^{i+l}u}{\partial x_1^i\,\partial x_2^l}=0} \quad . \tag{2.1}$$

Розв'язки рівняння (2.1) шукаємо у вигляді інтегралу (1.2) з ядерною функцією $K\left(x_1,x_2,z\right)=K\left(x_1+x_2z\right)$,

$$u\left(x_1,x_2\right)=\int_\Gamma K\left(x_1+x_2z\right)\phi\left(z\right)dz \tag{2.2}$$

Згідно рівності (1.4), якщо прийняти $K_1\left(x_1+x_2z\right)=K\left(x_1+x_2z\right)$ і, відповідно, $L_{xx}\left(K\right)=Z_z\left(K\right)$, то одержимо такий вираз для диференціальної форми

$$Z_z\left(K\right)=\sum_{l=0}^{k}\left(\sum_{i=0}^{l}a_i^{l-i}z^{l-i}\right)\frac{d^lK}{dz^l}. \tag{2.3}$$

Для визначення функції $\phi\left(z\right)$ маємо рівняння (1.7), в якому

$$Z_z\left(\phi\right)=\sum_{l=0}^{k}(-1)^l\frac{d^l}{dz^l}\left(\phi\sum_{i=0}^{l}a_i^{l-i}z^{l-i}\right) \text{ або } Z_z\left(\phi\right)=\sum_{r=0}^{k}\left\{\sum_{i=0}^{r}z^i\left[\sum_{l=0}^{k-r}(-1)^{l+r}\frac{(l+i)\,!}{i\,!}C_{l+r}^{r}a_{r-i}^{l+i}\right]\right\}\frac{d^r\phi}{dz^r}.$$

Для випадку однорідного рівняння, розглянувши замкнутий контур інтегрування, рівність (1.8) перетворюється у тотожність.

Приклад. Розглянемо гармонічне рівняння, записане у циліндричній системі координат

$$r^2\left(\frac{\partial^2u}{\partial r^2}+\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\right)+r\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}=0. \tag{2.4}$$

Шукаємо його розв'язки у вигляді суми ряду

$$u=\sum_{m=-\infty}^{\infty}u_me^{im\theta}. \tag{2.5}$$

Для визначення невідомих функцій $u_m=u_m\left(x,r\right)$, після підстановки (2.5) в (2.4), прийдемо до такого рівняння

$$r^2\left(\frac{\partial^2u_m}{\partial r^2}+\frac{\partial^2u_m}{\partial x^2}\right)+r\frac{\partial u_m}{\partial r}-m^2u_m=0 \tag{2.6}$$

Рівняння (2.6) є рівнянням виду (2.1),

$$\sum_{i=0}^{2}\sum_{l=0}^{i}a_i^lx_2^{l+i}\frac{\partial^{i+l}u}{\partial x_1^i\partial x_2^l}=0, \tag{2.7}$$

при $k=2$, $x_1=x, x_2=r$, $a_0^2=a_2^0=a_0^1=1$, $a_1^1=a_1^0=0$, $a_0^0=-n^2$.

Запишемо в інтегральній формі (2.2) розв'язки рівняння (2.6). Диференціальна форма (2.3) і відповідна їй спряжена форма мають вигляд

$$Z_z\left(\phi\right)=\sum_{l=0}^{2}\left(\sum_{i=0}^{l}a_i^{l-i}z^{l-i}\right)\frac{d^l\phi}{dz^l}, Z_z\left(K\right)=\sum_{l=0}^{2}(-1)^l\frac{d^l}{dz^l}\left(\phi\sum_{i=0}^{l}a_i^{l-i}z^{l-i}\right). \tag{2.8}$$

Друге рівняння (2.8) з урахуванням значень коефіцієнтів, прийнятих в (2.7), таке

$$\frac{d^2}{dz^2}\left[\left(z^2+1\right)\phi_m\right]-\frac{d}{dz}\left(z\phi_m\right)-m^2\phi_m=0. \tag{2.9}$$

Фундаментальну систему розв'язків цього рівняння становлять наступні функції $\phi_0^1=\dfrac{1}{\sqrt{1+z^2}}$, $\phi_0^2=\dfrac{Arsh\;z}{\sqrt{1+z^2}}$, $\phi_m^1=\dfrac{sh\left(m\;Arshz\right)}{\sqrt{1+z^2}}$, $\phi_m^2=\dfrac{ch\left(m\;Arshz\right)}{\sqrt{1+z^2}}$, $\left(m=\pm1,\pm2,,...\right)$, серед яких $\phi_m^1\left(m=0,\pm1,...\right)$ - сингулярні функції.

Тоді за формулою (2.2) з урахуванням розвинення (2.5) запишемо розв'язок рівняння (2.4) у вигляді

$$u(x,r,\theta)=\int_{\Gamma} K(x+r\,z)\phi(z,\theta)\,dz\,, \qquad (2.10)$$

де $\phi(z,\theta)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m\phi_m^1(z)e^{i\theta}=\sum_{m=0}^{\infty}\phi_m^1(z)\left(C_m^c\cos m\theta+C_m^s\sin m\theta\right)$; C_m^c, C_m^s - послідовності дійсних чисел.

Якщо функцію $K=\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$ вважати аналітичною в деякій області комплексної змінної, то формулу (2.10) можна записати ще так

$$u(x,r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\left(B_{nm}^c\cos m\theta+B_{nm}^s\sin m\theta\right)P_{nm}(x,r)\,, \qquad (2.11)$$

де $P_{nm}(x,r)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0}(x+rz)^n\phi_m^1(z)\,dz$ - многочлени двох змінних [3,4]; Γ_0 - додатно орієнтоване коло $\left(z\left(=R_0>1\right.\right.$; B_{mn}^c, B_{mn}^s - послідовності дійсних чисел.

Коефіцієнти у розвиненні (2.11) шукаємо з умов відповідної граничної задачі для рівняння (2.4).

ЛІТЕРАТУРА:

1. Айнс Э. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. / Э. Л. Айнс– Харьков: ДНТВУ, 1939. – 720 с.
2. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. / Э. Камке– М.: Наука, 1974. – 576 с.
3. Маркушевич А.И. Избранные главы теории аналитических функций. / А.И. Маркушевич – М.: Наука, 1976. – 192 с.
4. Сухорольський М.А. Інтегральне зображення функцій, біортогональних з алгебраїчними многочленами/ М.А. Сухорольський // Вісник держ. ун-ту „Львівська політехніка”. Прикладна математика. – 1998. - № 346. – С. 111 – 115.

СУХОРОЛЬСЬКИЙ Михайло Антонович – докт. фіз.-мат. наук, професор кафедри вищої математики Національного університету “Львівська політехніка”.

Наукові інтереси:

– механіка деформівного твердого тіла, теорія пружності, методи розв’язку систем сингулярних інтегральних рівнянь та інформаційні технології.

КОСТЕНКО Ірина Сергіївна – канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри обчислювальної математики і програмування

Наукові інтереси:

– механіка руйнування, математичні моделі в механіці деформівного твердого тіла та інформаційні технології.

ДОСТОЙНА Вероніка Володимирівна – аспірант кафедри вищої математики Національного університету “Львівська політехніка”.

Наукові інтереси:

– механіка деформівного твердого тіла, теорія пружності, методи розв’язку систем сингулярних інтегральних рівнянь та інформаційні технології.