

**РАЗВИТИЕ МЕТОДА СУПЕРЭЛЕМЕНТОВ БАЛОЧНОГО ТИПА ДЛЯ СЛУЧАЕВ
КОМБИНИРОВАННОГО НАГРУЖЕНИЯ ПРИ ИЗГИБЕ**

Постановка проблемы. Анализ публикаций по теме исследований. Опыт проектирования пространственно развитых механических систем различного конструктивного исполнения показывает, что всесторонний анализ динамики их свободного и управляемого движения требует, как правило, совокупности различной полноты взаимно дополняющих друг друга математических моделей базирующихся как на классических, так и новых методах моделирования.

Идея метода суперэлементов (СЭ) применительно к упругим балочным фрагментам конструкции механических систем основана на их представлении в виде набора подструктур, каждая из которых заменяется совокупностью базисных конечных элементов. Каждая из таких структур рассчитывается отдельно с учетом условий закрепления на общих с другими структурами границах. Результатом этого расчета является получение матрицы жесткости подструктуры и матрицы нагрузок в ее узлах. Подструктуры, для которых такие матрицы определены, называются СЭ [1].

Метод СЭ связывает методы распределенных систем и метод систем тел, позволяя свести распределенную упругую механическую систему к системе абсолютно твердых тел с упругими шарнирами. Являясь компромиссом между указанными методами, он удобен для инженерных моделей, так как сочетает достаточную полноту описания динамики с достоинством процесса моделирования дискретных систем, позволяя варьировать точность подбором числа СЭ в зависимости от типа решаемой задачи.

Распространенным конструктивным элементом пространственно развитых механических систем являются балки, в основу расчетных схем которых могут быть положены балки Эйлера-Бернулли нагруженные на концах сосредоточенными силами, изгибающими моментами, а также распределенными по длине силами и моментами. Для конечно-элементного моделирования таких балок используют СЭ балочного типа формируемые из трех последовательно соединенных абсолютно жестких балочных конечных элементов. Суперэлементы балочного типа, имитирующие плоский изгиб исходной упругой балки под действием приложенных на концах сосредоточенных сил и изгибающих моментов, рассмотрены в работах [2-5]. При этом в работе [2] развиты общие подходы рассматриваемого суперэлементного представления. Статьи [3-5] посвящены использованию СЭ балочного типа при моделировании динамики плоских упругих манипуляторов и лопастей ветроэлектрических установок.

Условной технической реализацией СЭ балочного типа является трехзвенный механизм с упругими шарнирами и охватывающим первое и третье звенья упругим элементом. В основе выбора кинематической схемы таких эквивалентных механизмов и жесткостей сосредоточенных упругих элементов лежат два условия эквивалентности – геометрическое и частотное:

- при идентичности наборов действующих силовых факторов должно обеспечиваться равенство прогибов на концах и углов поворота торцевых сечений в плоскости изгиба с исходным упругим конструктивным элементом;

- выбор геометрических, массовых и жесткостных параметров эквивалентного механизма должен обеспечивать близость его собственных частот с исходным конструктивным элементом.

При соблюдении указанных условий суперэлементный подход сводится к эквивалентной замене элементов конструкции механических систем, имеющих, в общем случае, конечную жесткость на изгиб, механизмами или группами механизмов, составленными из жестких балок и сосредоточенных упругих элементов, например пружин сжатия-растяжения. Такое представление придает наглядность и упрощает расчетную схему, как самого упругого элемента конструкции, так и конструкции в целом, так как позволяет рассматривать полученный эквивалентный механизм с абсолютно жесткими звеньями и сосредоточенными упругими элементами как самостоятельную конструкцию.

Способ эквивалентного представления существенно рационализирует процедуру разработки моделей динамики систем тел со структурой «дерева», типовым представителем которых являются, например, ветроэлектрические установки с разновидностями ротора Дарье и т.п. Данный способ позволяет сделать единообразным подход к учету упругих свойств элементов конструкции и упругих свойств сочленяющих их шарнирных узлов.

Кинематическая схема СЭ в первую очередь формируется так, чтобы обеспечить выполнение первого условия эквивалентности. Соблюдение второго условия достигается подбором его геометрических и жесткостных параметров.

Цель статьи. Развитие метода СЭ балочного типа при комбинированной нагрузке исходной упругой балки сосредоточенными и распределенными силовыми факторами и оценка точности суперэлементного представления при этом виде нагружения.

Основная часть. Рассмотрим далее СЭ, реализующие плоский изгиб под действием внешних сосредоточенных силовых факторов – силы F и момента M и внешней распределенной нагрузки q .

В работах [2-5] предложен алгоритм формирования СЭ, имитирующего изгибные деформации консольно закрепленной упругой балки Эйлера-Бернулли в плоскости под действием внешних сосредоточенных силовых факторов – силы F и момента M , приложенных на свободном конце (рис.1). Исходной балке длиной l ставится в соответствие трехзвенный механизм с упругими шарнирами, реализующими вращательные кинематические пары 5-го класса (рис.2) и длинами звеньев $l_1 = l_3$ и l_2 . Полагается, что $l_1/l = l_3/l = k$, где $l = l_1 + l_2 + l_3$. Тогда $l_2 = (1 - 2k)l$. Кинематическая схема введенного СЭ допускает техническую реализацию механизмов с $0 < k < 1/2$. При $k \rightarrow 0$ шарниры O_1, O_2 симметрично перемещаются к торцевым сечениям, а при $k \rightarrow 1/2$ - к центру, сливаясь в пределе в один шарнир.

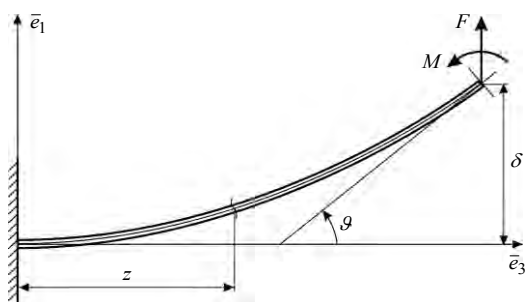


Рис. 1. Консольно закрепленная балка Эйлера-Бернулли, нагруженная сосредоточенными силовыми факторами

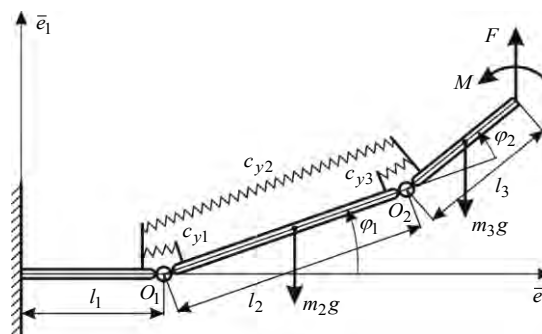


Рис. 2. Расчетная схема плоского СЭ

Связь между приложенными силовыми факторами и параметрами, описывающими обусловленные ими изгибные деформации балки (прогибом δ и углом поворота торцевого сечения ϑ на свободном конце балки) и механизма (углами в шарнирах φ_1 и φ_2), определяется следующим образом. Полагается, что изогнутая ось балки описывается уравнением

$$\frac{d^2v}{dz^2} = \frac{M(z)}{EI}$$
 (v - текущий прогиб, z - продольная координата), полученным с использованием предположения Эйлера-Бернулли, т.е. исследуемая балка – балка Эйлера-Бернулли [6].

Алгоритмическая схема эквивалентного представления состоит из следующих шагов:

- формируется выражение для изгибающего момента под действием рассматриваемой системы силовых факторов как функция продольной координаты балки;
- с использованием полученного выражения получается дифференциальное уравнение изогнутой оси балки;
- с учетом граничных условий на заделанном конце балки находят первый и второй интегралы уравнения изогнутой оси; эти интегралы при $z = l$ дают значения угла поворота торцевого сечения и прогиба на свободном конце балки как функции от приложенных силовых факторов;
- находят соотношения, связывающие углы поворотов и жесткости упругих элементов в шарнирах СЭ и приложенные к нему силовые факторы, аналогичные приложенным к исходной балке;
- выражают угол поворота и прогиб торца СЭ через шарнирные углы;
- путем приравнивания углов поворота торцевого сечения и прогибов исходной балки и СЭ находят значения жесткостей упругих элементов в шарнирах СЭ как функции жесткостных параметров балки и параметра k , определяющего положение шарниров.

Для СЭ, нагруженного силовыми факторами на свободном конце, выполнение первого условия эквивалентности обеспечивается при [4,5]

$$c_{y1} = c_{y3} = \frac{6EI}{l} (2k - 1)^2, \quad c_{y2} = \frac{2EI}{l} (-6k^2 + 6k - 1). \quad (1)$$

где EI - жесткость при изгибе в плоскости колебаний (E - модуль Юнга материала, I - момент инерции поперечного сечения балки относительно нейтральной оси сечения, перпендикулярной к плоскости колебаний).

Обобщим описанный выше алгоритм формирования СЭ при изгибных деформациях исходной балки на случай ее нагружения распределенной нагрузкой. Кинематическую схему СЭ эквивалентного исходной упругой балке при изгибных деформациях в плоскости под действием внешней распределенной нагрузки q (рис.3) введем так же, как и в случае нагружения сосредоточенными силовыми факторами. Для нахождения связи между приложенной внешней распределенной нагрузкой и параметрами, описывающими обусловленные ею изгибные деформации балки (прогибом δ и углом поворота торцевого сечения ϑ на свободном конце балки) и механизма (углами в шарнирах φ_1 и φ_2), воспользуемся алгоритмом, примененным при исследовании изгибных деформаций под действием сосредоточенных силовых факторов.

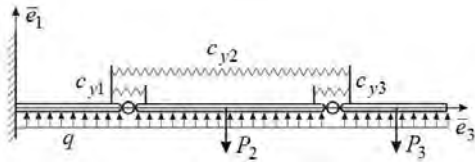


Рис. 3. Расчетная схема СЭ при нагружении распределенной нагрузкой

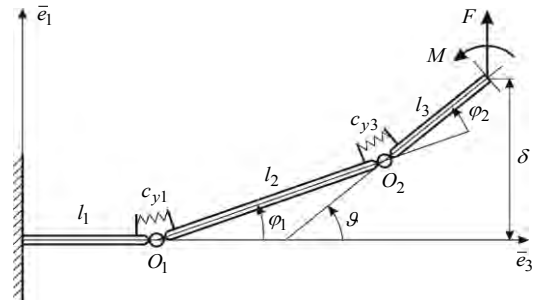


Рис. 4. Расчетная схема упрощенного СЭ

Изгибающий момент в произвольном сечении балки (рис.3) с координатой z определяется соотношением $M(z) = q(l-z)^2/2$. Его подстановка в уравнение изогнутой оси дает $v''(z) = q(l-z)^2/2EI$. Первый и второй интегралы этого уравнения с учетом нулевых значений постоянных интегрирования ($C_1 = 0, C_2 = 0$), обусловленных граничными условиями на заделанном торце балки $v'(0) = 0, v(0) = 0$ ($v'(0)$ и $v(0)$ - угол поворота поперечного сечения и прогиб в месте заделки балки ($z = 0$)), имеют вид

$$v'(z) = \frac{1}{2EI} \left(l^2 z - lz^2 + \frac{1}{3} z^3 \right) q, \quad v(z) = \frac{1}{2EI} \left(\frac{1}{2} l^2 z^2 - \frac{1}{3} lz^3 + \frac{1}{12} z^4 \right) q. \quad (2)$$

При $z = l$ уравнения (2) после взаимной перестановки уравнений дают значения угла поворота торцевого сечения (ϑ) и прогиба (δ) на свободном (правом) конце балки

$$\begin{pmatrix} \delta & \vartheta \end{pmatrix}^T = \frac{q}{2EI} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} l^4 & \frac{1}{3} l^3 \end{pmatrix}^T. \quad (3)$$

Обратимся к СЭ (рис.3). Распределенная нагрузка на подвижных звеньях СЭ приводится к равнодействующим $P_2 = ql_2$ и $P_3 = ql_3$. При приложении к балочному конечному элементу распределенной нагрузки предусматривается замена ее эквивалентной узловой [1]. Так как в рассматриваемом случае конечные балочные элементы, формирующие СЭ, абсолютно жесткие, - приведение равнодействующих P_2 и P_3 распределенной нагрузки к узлам O_1 и O_2 приведет к той же деформированной конфигурации СЭ, что и до приведения. С учетом этого будем использовать схему нагружения, которая для текущего деформированного состояния имеет вид, приведенный на рисунке 3.

Под действием равнодействующих P_2 и P_3 СЭ принимает конфигурацию, однозначно определяемую углами φ_1 и φ_2 в шарнирах O_1 и O_2 . В этом случае внешние силовые факторы P_2 и P_3 вызывают в шарнире O_1 изгибающий момент $P_2 l_2 / 2 + P_3 (l_2 + l_3 / 2) = ql^2 (1 - k)^2 / 2$, а в шарнире O_2 - $P_3 l_3 / 2 = ql^2 k^2 / 2$. Приравнивая величины изгибающих моментов в шарнирах и уравновешивающих их моментов со стороны деформированных упругих элементов, получим систему уравнений в матричной форме (с учетом допущения о симметричности кинематической схемы СЭ, т.е. при $c_{y1} = c_{y3}$)

$$\begin{pmatrix} (c_{y1} + c_{y2}) & c_{y2} \\ c_{y2} & (c_{y1} + c_{y2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = q \begin{pmatrix} \frac{1}{2} l^2 (1-k)^2 \\ \frac{1}{2} l^2 k^2 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

После взаимных подстановок соотношений (3), (4), с учетом связывающих δ, ϑ и φ_1, φ_2 выражений $\delta = l(1-2k)\varphi_1 + lk(\varphi_1 + \varphi_2)$, $\vartheta = \varphi_1 + \varphi_2$ (рис.2) получим

$$\begin{pmatrix} c_{y1}(4k-3) + c_{y2}(8k-4) \\ c_{y1}(4k-1) + c_{y2}(8k-4) \end{pmatrix} q = \begin{pmatrix} \frac{12EI(2k-1)(1-k)^2}{l} \\ \frac{12EI(2k-1)k^2}{l} \end{pmatrix} q. \quad (5)$$

Приравняв в (5) соответствующие элементы матриц-столбцов и разрешив полученную систему алгебраических уравнений относительно c_{y1} и c_{y2} , найдем условия обращения (5) в тождество

$$c_{y1} = \frac{6EI}{l} (2k-1)^2, \quad c_{y2} = \frac{3EI}{2l} (-6k^2 + 6k - 1). \quad (6)$$

Как следует из (1) и (6) в СЭ, поставленных в соответствие исходной упругой балке при нагружении сосредоточенными силовыми факторами F и M и распределенной нагрузкой q , значения жесткостей упругого элемента c_{y2} не совпадают. Очевидно, что в рамках одной расчетной схемы СЭ с тремя упругими элементами не удастся выполнить геометрическое (первое) условие эквивалентности. Это объясняет, почему задача формирования суперэлемента была разбита на два этапа. Однако и в том и другом случаях при $k = \frac{1}{2}(1 - 1/\sqrt{3}) \approx 0,211$ можно получить один и тот же упрощенный СЭ без

упругого элемента c_{y2} (как на рис.4, но для всех видов нагрузки), для которого геометрическое условие эквивалентности соблюдается. В дальнейшем, при моделировании упругих балочных элементов реальных механических систем, нагруженных сосредоточенными и распределенными силовыми факторами, рекомендуется использовать упрощенную расчетную схему СЭ. На рисунке 5 приведены зависимости от параметра k отношений жесткостей упругих элементов c_{y1}, c_{y2} СЭ к погонной жесткости исходных упругих балок (получены из формул (1), (6)). В точке A с абсциссой $k = \frac{1}{2}(1 - 1/\sqrt{3})$ графики $\frac{c_{y2}}{(EI/l)}(k)$ для СЭ, нагруженных сосредоточенными и распределенными силовыми факторами, пересекают ось k , т.е для них $c_{y2}(k) = c_{y2}\left(\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = 0$.

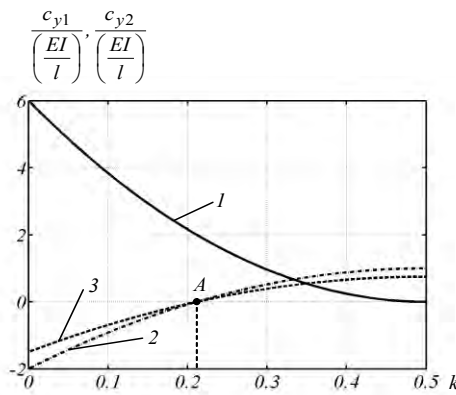


Рис. 5. Зависимости отношений жесткостей СЭ к жесткостям исходных балок:

1 – зависимости $\frac{c_{y1}}{\left(\frac{EI}{l}\right)}(k)$ для суперэлементов, нагруженных сосредоточенными (F, M) и

распределенными (q) силовыми факторами;

2 – зависимость $\frac{c_{y2}}{\left(\frac{EI}{l}\right)}(k)$ для суперэлемента, нагруженного сосредоточенными силовыми факторами

(F, M) ;

3 – зависимость $\frac{c_{y2}}{\left(\frac{EI}{l}\right)}(k)$ для суперэлемента, нагруженного распределенной нагрузкой (q) ;

Второе условие эквивалентности позволяет из всего многообразия СЭ, отвечающих первому (геометрическому) условию, выбрать тот, который эквивалентен исходной балке в динамическом плане – по совпадению собственных частот колебаний (частотное условие). Одиночный СЭ имеет две степени свободы и, соответственно, две собственные частоты. В идеальном случае желательно совпадение этих частот с первыми двумя частотами исходной балки. Выбор необходимых геометрических и жесткостных параметров СЭ может быть осуществлен путем решения нелинейных алгебраических уравнений относительно параметра k , полученных путем приравнивания выражений собственных частот СЭ и первых двух собственных частот балки Эйлера-Бернулли.

Для нахождения собственных частот исходной консольно закрепленной балки Эйлера-Бернулли воспользуемся уравнением частот $\cos(\alpha l)ch(\alpha l) = -1$, ($\alpha^2 = \sqrt{m_0 p^2 / EI}$), получаемым из уравнения свободных поперечных колебаний прямой балки [7,8] при граничных условиях $u_{z=0} = 0$, $(du/dz)_{z=0} = 0$, $(d^2u/dz^2)_{z=l} = 0$, $(d^3u/dz^3)_{z=l} = 0$. Здесь $u(z)$ - амплитудная функция, устанавливающая закон распределения амплитудных отклонений точек оси балки от равновесного положения; p - угловая частота колебаний; z - продольная координата балки в направлении базисного вектора \bar{e}_3 ; m_0 - масса единицы длины балки.

Для первых двух собственных частот упругой балки получают следующие соотношения [7-9]

$$p_1 = \frac{(1,8751)^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m_0}}, \quad p_2 = \frac{(4,6941)^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m_0}}. \quad (7)$$

Для расчета собственных частот СЭ в силу малости колебаний исходной балки воспользуемся его линеаризованными уравнениями динамики, полученными с использованием формализма уравнений Лагранжа 2-го рода, выбрав в качестве обобщенных координат углы $\varphi_i, (i = 1, 2)$ в шарнирах СЭ, как однозначно определяющие его текущую конфигурацию. Рассматриваются малые колебания исходной балки Эйлера-Бернулли, поэтому свободные колебания СЭ будем анализировать на основе линеаризованных уравнений движения. В соответствии с классическим алгоритмом получения уравнений Лагранжа 2-го рода для колебательных систем [7,8] линеаризованные уравнения СЭ представимы в виде

$$A\ddot{q} + Cq = 0, \quad (8)$$

где

$$A(q) = \begin{pmatrix} I_{O1} + I_{C3} + m_3 l_2^2 + \frac{1}{4} m_3 l_3^2 + m_3 l_2 l_3 & I_{C3} + \frac{1}{4} m_3 l_3^2 + \frac{1}{2} m_3 l_2 l_3 \\ I_{C3} + \frac{1}{4} m_3 l_3^2 + \frac{1}{2} m_3 l_2 l_3 & I_{C3} + \frac{1}{4} m_3 l_3^2 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{y1} + c_{y2} & c_{y2} \\ c_{y2} & c_{y2} + c_{y3} \end{pmatrix}.$$

Поиск решение матричного уравнения (8) в форме $q = U \sin(pt + \varphi)$ ($U = (u_1 \ u_2)^T$ - матрица-столбец с постоянными элементами, характеризующая соотношение между различными

обобщенными координатами; p - угловая частота; φ - фаза колебаний) позволяет получить выражения для квадратов первой и второй собственных частот в виде $p_i^2 = \left(-a_2 \pm \sqrt{a_2^2 - 4a_1a_3} \right) / 2a_1$, ($i = 1, 2$), где $a_1 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$,

$a_2 = a_{12}c_{21} + a_{21}c_{12} - a_{11}c_{22} - a_{22}c_{11}$, $a_3 = c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}$. Приравнявая эти выражения выражениям для первых двух собственных частот исходной балки Эйлера-Бернулли, получим искомую систему нелинейных алгебраических уравнений относительно параметра k в виде

$$\frac{(1,875)^4 EI}{l^4 m_0} = \frac{-a_2 - \sqrt{a_2^2 - 4a_1a_3}}{2a_1}, \quad \frac{(4,694)^4 EI}{l^4 m_0} = \frac{-a_2 + \sqrt{a_2^2 - 4a_1a_3}}{2a_1}. \quad (9)$$

В качестве тестового примера рассматривались три балки с круговым, трубчатым и прямоугольным сечениями длиной $l = 10$ м с параметрами $R = 0,025$ м, $r = 0,02$ м, $b = 0,025$ м, $h = 0,05$ м. В качестве материала выбрана сталь с модулем Юнга $E = 2,1 \cdot 10^{11}$ н/м² и плотностью $\rho = 7,85 \cdot 10^3$ кг/м³.

На рисунке 6 приведены зависимости от параметра k первых собственных частот для СЭ эквивалентных исходным балкам при нагружении сосредоточенными силовыми факторами, т.е. при c_{yi} , $i = \overline{1,3}$ вида (1). Аналогичные зависимости для СЭ при нагружении распределенной нагрузкой отличаются от приведенных на рис.6 незначительно. Там же, для сравнения, нанесены первые собственные частоты исходных балок Эйлера-Бернулли. На графиках изменения первых собственных частот штриховкой выделены частотные диапазоны, в которых отличия собственных частот исходных балок от частот соответствующих им СЭ составляют не более чем 4%.

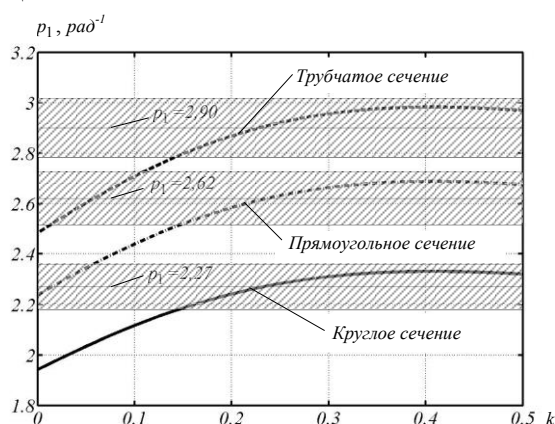


Рис. 6. Зависимости первых собственных частот от расположения шарниров СЭ (параметра k)

Первые собственные частоты СЭ и исходных балок совпадают при $k \approx 0,239$.

Характер зависимостей $p_1 = p_1(k)$, приведенных на рис.6, позволяет обеспечивать приемлемое (не более чем на 4%) отличие первых собственных частот суперэлементов и исходных балок в широком диапазоне значений параметра k . Первые собственные частоты СЭ с упрощенной расчетной схемой (без

упругого элемента c_{y2} и $k = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \approx 0,21132$) отличаются от первых частот исходных балок на

~1% и равны соответственно 2,2522 1/с, 2,8815 1/с и 2,5962 1/с. Для исходных балок первые собственные частоты равны соответственно 2,2752 1/с, 2,9110 1/с и 2,6228 1/с.

Таким образом, можно сделать вывод, что одиночный СЭ, поставленный в соответствие исходной упругой балке Эйлера-Бернулли путем варьирования параметра k может обеспечить близкое расположение их первых собственных частот в довольно широком диапазоне его значений. Одиночный СЭ с упрощенной расчетной схемой обеспечивает точное соблюдение первого (геометрического) условия эквивалентности и с погрешностью ~1% выполнение второго (частотного) условия эквивалентности только по первой собственной частоте.

Выводы и перспективы дальнейших исследований. Проведено обобщение алгоритма формирования СЭ балочного типа при изгибных деформациях исходной балки Эйлера-Бернулли на

случай ее нагружения распределенной нагрузкой. Получены соотношения для расчета жесткостей упругих элементов СЭ, обеспечивающих выполнение геометрического и частотного критериев эквивалентности. Обоснован выбор кинематической схемы упрощенного СЭ, эквивалентного по указанным критериям исходной упругой балке при комбинированном нагружении сосредоточенными и распределенными силовыми факторами. Для ряда балок Эйлера-Бернулли с типовыми сечениями (круговым, трубчатым и прямоугольным) даны оценки точности суперэлементного представления. Точность приближения собственных частот для балок с произвольными значениями геометрических и жесткостных параметров, являющихся конструктивными элементами различных механизмов, можно установить, проведя исследования в соответствии с основными пунктами изложенной методики.

Естественным развитием суперэлементного подхода к имитации динамических свойств балки Эйлера-Бернулли является представление ее в виде кинематической цепи N последовательно соединенных СЭ. Представление балок Эйлера-Бернулли совокупностью последовательно соединенных одиночных СЭ, позволяет при росте их числа обеспечить увеличение точности приближения к континуальной модели для балок с произвольными геометрическими и жесткостными параметрами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильин В.Н. Численные методы решения задач строительной механики : монография / В.Н. Ильин, В.В. Карпов, А.М. Масленников. - Минск, 1990.
2. Rauh J. Ein Beitrag zur Modellierung elastischer Balkensysteme. Fortschritt-Berichte VDI, VDI-Verlag GmbH, Dusseldorf, Reihe 18 :Mechanik/Bruchmechanik, Nr. 37, 126p., 1989.
3. Rauh J., Schiehlen W. Various approaches for the Modeling of Flexible Robot Arms. In Proceedings of the Euromech-Colloquium 219 on Refined Dynamical Theories of Beams, Plates, and Shells and their Applications, Kassel, 1986, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, pp. 420–429, 1987.
4. Molenaar D.-P. Cost-effective design and operation of variable speed wind turbines. - 2003.
5. Molenaar D.-P., Dijkstra S. Modeling the structural dynamics of flexible wind turbine: the Lagerwey LW-50/750 / Selected Topics in Identification. Modeling and Control, Vol. 11, December 1998. – pp.51-59.
6. Лазарян В.А. Техническая теория изгиба : монография / В.А. Лазарян. – К.: Наукова думка, 1976. – 208с.
7. Бабаков И.М. Теория колебаний : монография / И.М.Бабаков. – М.: ГИТТЛ, 1958. – 628с.
8. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний : монография / В.Л.Бидерман. – М.: Высшая школа, 1980. – 408с.
9. Вибрации в технике : справочник в 6 томах / Ред.совет: В.Н.Челомей (пред.). – М.: Машиностроение, 1978. Т.1: Колебания линейных систем/ Под ред. В.В.Болотина. – 352с.

ТАРАСОВ Сергей Васильевич – к.т.н., с.н.с., заведующий отделом технической механики и энергетических систем Института транспортных систем и технологий НАН Украины.

Научные интересы:

- динамика пространственно развитых механических систем.

ТАРАСОВ Андрей Сергеевич – младший научный сотрудник отдела сверхпроводящих магнитных систем Института транспортных систем и технологий НАН Украины.

Научные интересы:

- динамика вертикально-осевых ветроустановок с упругим ротором.