УДК 62-52

А. В. Усов, А. Д. Хамитова

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО ПОДАВЛЕНИЯ ХАОСА МЕТОДАМИ ГАРМОНИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Поведение любой системы может быть представлено бесконечным рядом гармоник с временным коэффициентом перед каждой. Если в модели линейной системы различные виды гармонических колебаний независимы, то в нелинейной модели устанавливается вполне определенная связь между ними. Причем характер этой связи определяется нелинейностью. Процессы в нелинейной среде могут происходить избирательно, что вызвано неравномерным по спектру затуханием процессов (1). Хаос необходим для выхода системы на один из аттракторов, на одну из возможных структур. Он лежит в основе механизма объединения простых структур в сложные, механизма согласования темпов их эволюции. Хаос выступает как средство усложнения организации и как средство гармонизации темпов развития различных фрагментов сложной структуры (3)

Рассмотрим механизм процесса самовыстраивания структуры в хаотической среде. Для этого решим задачу стабилизации хаоса в дискретной системе методом запаздывающей обратной связи. Определяется минимально возможная величина глубины предыстории обратной связи, в зависимости от мультипликатора системы. Полученная зависимость основана на решении специальной задачи на условный экстремум для сопряженных тригонометрических полиномов

$$\sup_{\substack{(a_1,\ldots a_n)\\ \sum a_j=1}} \min_t \left\{ \sum_{j=1}^{n} a_j \cos jt : \sum_{j=1}^{n} a_j \sin jt = 0 \right\} = -tg^2 \frac{\pi}{2(n+1)}.$$

Проблема оптимального воздействия на хаотический режим является одной из фундаментальных в нелинейной динамике [1]. Для многопараметрических семейств дискретных систем эта проблема сводится к выбору направления, обеспечивающего максимальный запас устойчивости в пространстве одного параметра. При изменении этого параметра наблюдается последовательность бифуркаций, приводящая к возникновению хаотического аттрактора. Первые бифуркационные значения параметра соответствуют потере системой устойчивого положения равновесия. Эти значения связаны с областью устойчивости по Шуру семейства полиномов

$$\left\{ f(\lambda) = \lambda^n + k(a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n), \sum_{j=1}^{n} a_j = 1 \right\} \tag{1}$$

в пространстве параметра k.

При $k = 0$ все полиномы семейства (1) устойчивы. При $k \in (-k_1, k_2)$ $(k_1 > 0, k_2 > 0)$ семейство (1) остается устойчивым, но при $k = k_2 + \varepsilon$ или $k = -k_1 - \varepsilon$ устойчивость нарушается. Величины k_1, k_2 зависят от коэффициентов $a_1, \ldots, a_n$. Требуется максимизировать длину отрезка робастной устойчивости и найти оптимальные величины k_1, k_2.

Двойственной к сформулированной задаче робастной устойчивости является следующая задача оптимальной стабилизации хаоса в семействах дискретных автономных систем с запаздывающей обратной связью (DFC - методы) [2].

Рассматривается разомкнутая скалярная нелинейная дискретная система вида

$$x_{n+1} = f(x_n),\ x_n \in R^1,\ n = 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

у которой имеется неустойчивое положение равновесия x^*. Предполагается, что дифференцируемая функция f зависит от конечного числа параметров, и при каждом допустимом множестве этих параметров определена на некотором ограниченном интервале и отображает его в себя. В этом случае от этих параметров будут зависеть положение равновесия x^* и мультипликатор $\mu = f'(x^*)$. Предполагается, что $\mu \in (-\mu^*, -1)$, $\mu^* > 1$, и в системе наблюдается явление квазидинамического хаоса. Требуется подавить хаос путем стабилизации положения равновесия x^* управлением вида

$$u = -\sum_{j=1}^{N-1} \varepsilon_j \left(f(x_{n-j+1}) - f(x_{n-j}) \right),\ \ 0 < \varepsilon_j < 1,\ j = 1, \ldots, N-1, \tag{3}$$

так чтобы глубина используемой предыстории $N^* = N - 1$ была бы минимально возможной.

Решение обеих задач основано на следующем результате.

Теорема 1. Пусть $C(t)$, $S(t)$ пара сопряженных тригонометрических полиномов

$$C(t) = \sum_{j=1}^{n} a_j \cos jt, \quad S(t) = \sum_{j=1}^{n} a_j \sin jt,$$

нормированных условием $\sum_{j=1}^{n} a_j = 1$. Пусть J является решением экстремальной задачи $\sup\limits_{a_1,..a_n} \min\limits_{t} \{ C(t) : S(t) = 0 \}$. Тогда $J = -tg^2 \dfrac{\pi}{2(n+1)}$.

Решение первой задачи. Искомый отрезок $(-k_1, k_2)$ имеет вид $(-1, \dfrac{1}{|J|})$. Его длина равна $\dfrac{1}{\sin^2 \dfrac{\pi}{2(n+1)}}$. Решение второй задачи.

Теорема 2. Пусть система семейства (2) имеет неустойчивое положение равновесия с мультипликатором $\mu \in (-\mu^*, -1)$, $\mu^* > 1$. Существует управление вида (3), стабилизирующее положение равновесия, оптимальное по отношению к минимуму величины глубины предыстории в запаздывающей обратной связи. При этом

$$N^* = \left\lfloor \frac{\pi}{2 \cdot arcctg \sqrt{\mu^*}} \right\rfloor - 1.$$

Как следует из доказательства Теоремы 1 оптимальные коэффициенты усиления можно определить соотношениями

$$\varepsilon_j = \sum_{k=j+1}^{N} a_k^0, \ j = 1, \dots, N-1, \text{ где } a_j^0 = 2 \cdot tg \frac{\pi}{2(N+1)} \cdot (1 - \frac{j}{N+1}) \cdot \sin \frac{\pi j}{N+1}, \ j = 1, \dots, N.$$

В этом случае $a_j^0 > 0, \ j = 1, \dots, N, \ \sum_{j=1}^{N} a_j^0 = 1.$ Следовательно, $0 < \varepsilon_j < 1, \ j = 1, \dots, N-1.$

Пример. Для однопараметрического логистического отображения $f(x) = h \cdot x \cdot (1 - x)$, *0≤h≤4*, $f : [0, 1] \to [0, 1]$. При $h \in (3, 4]$ положение равновесия $x^* = 1 - \dfrac{1}{h}$ неустойчиво, а мультипликатор $\mu \in [-2, -1)$ (рис. 1).

Тогда $\dfrac{\pi}{2 \cdot arcctg \sqrt{2}} \approx 2{,}55$, следовательно, минимальная глубина предыстории в запаздывающей обратной связи $N^* = 1$, оптимальный коэффициент усиления $\varepsilon_1^0 = \dfrac{1}{3}$, искомое управление $u = -\dfrac{1}{3}\left(f(x_n) - f(x_{n-1})\right)$ (рис.2).

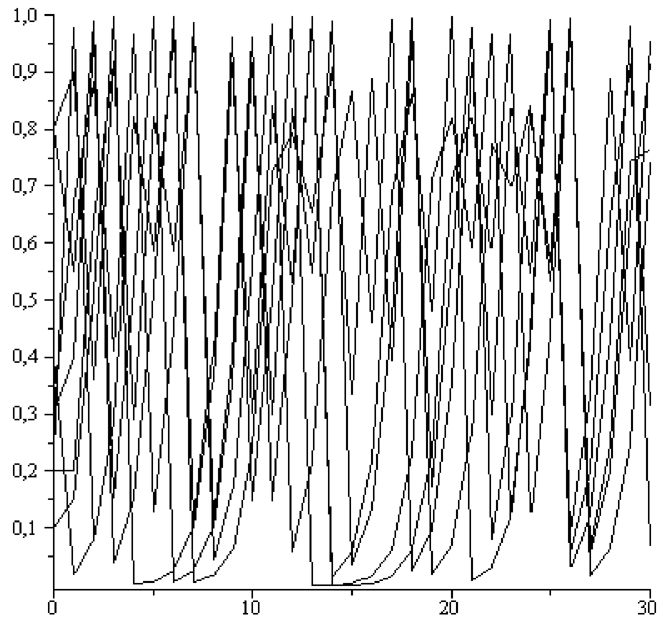

Рис. 1 Квазистахостическая динамика решений логистического уравнения

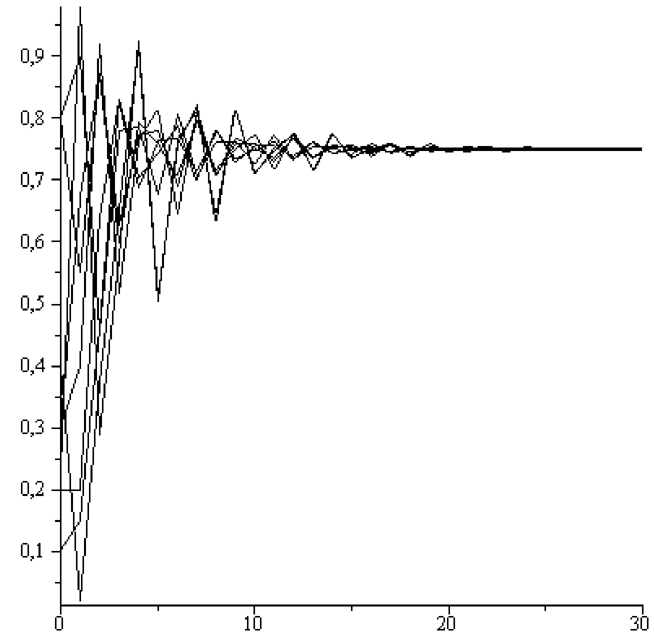

Рис. 2 Динамика решений логистического уравнения, замкнутого стабилизирующим управлением

Разработанный метод стабилизации хаоса можно распространить на стабилизацию циклов любой длины. Полученные в этих случаях управления можно использовать, например, в задачах кодирования информации, в медицинской диагностике, колебаниях несущих конструкций и многих других прикладных задачах,

ЛИТЕРАТУРА:

1. Chen G., Yu X. Chaos control. – Lect. Notes Contr. Inf. Sci. 2003. No. 292.
2. Ushio T. Limitation of delayed feedback control in nonlinear discrete – time systems // IEEE Trans. Circ. Syst. 1996, V.43. P. 815-816.
3. Малинецкий Г.Г. Нелинейная динамика: Подходы, результаты, надежды// Г.Г. Малинецкий, А.Б. Потапов, А.В. Подлазов–М.: КомКнига, 2006.– 280с.

УСОВ Анатолий Васильевич – д.т.н., профессор, зав. кафедрой высшей математики и моделирования систем Одесского национального политехнического университета.

Научные интересы:

– математическое моделирование систем и управление.

ХАМИТОВА Анна Дмитриевна – аспирант кафедры высшей математики и моделирования систем Одесского национального политехнического университета

Научные интересы:

– ситемы и процессы управления.