УДК 51-72:531/533

Н.Н. Чеканова, Н.А. Чеканов

ИНВАРИАНТЫ ОДНОМЕРНОГО ГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА С ЗАВИСЯЩЕЙ ОТ ВРЕМЕНИ ЧАСТОТОЙ

Постановка задачи. Анализ публикаций по теме исследования. В статье [1] проведено исследование движения нерелятивистской заряженной частицы в зависящем от времени магнитном поле и показано, что такая система может быть описана функцией Гамильтона вида

$$H(q,p)=\frac{1}{2\varepsilon}\left[p^2+\Omega^2(t)q^2\right], \tag{1}$$

где (p,q) – канонически сопряженные координата и импульс, $\Omega(t)$ – произвольная функция от времени t, ε – положительный действительный параметр. Гамильтонова функция (1) описывает более широкий класс систем, чем исследованная частная задача [1]. Формально система с функцией Гамильтона (1) представляет одномерный гармонический осциллятор с зависящей от времени частотой, движение которого описывается линейным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\varepsilon^2 q''+\Omega^2(t)q=0. \tag{2}$$

На основе асимптотической теории [2] в результате достаточно сложных вычислений автор работы [1] получил следующие точные инварианты

$$I=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{q}{p}\right)^2+\left(\rho p-\varepsilon\rho' q\right)^2\right] \tag{3а}$$

или, так как $p=\varepsilon q'$, в виде

$$I=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{q}{p}\right)^2+\varepsilon^2\left(\rho q'-\rho' q\right)^2\right], \tag{3б}$$

где функция $\rho=\rho(t)$ есть любое частное решение нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$\varepsilon^2\rho''+\Omega^2\rho=\frac{1}{\rho^3}. \tag{4}$$

Так как выражение (3) содержит произвольное частное решение уравнения (4), то оправдано использовать множественное число для инвариантов (3).

Уравнение (4) было несколько раз независимо переоткрыто в разных подходах и разными методами [1,3,4]. Но как впервые обнаружили и опубликовали Л.М. Беркович и Н.Х. Розов [5,6] нелинейное дифференциальное уравнение (4) было предложено и проинтегрировано еще в 1880 году киевским профессором В.П. Ермаковым [7].

В настоящей работе показано, что уравнение (4) и точные инварианты (3) простым образом следуют из общей теории сопряженных обыкновенных дифференциальных уравнений (см., например, книгу [8]).

Цель статьи. Получить общие выражения, из которых следуют уравнения (2), (4) и инварианты (3).

Основная часть. Пусть дано линейное обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка

$$L_3[y]\equiv b_0y'''+b_1y''+b_2y'+b_3y=0 \tag{5}$$

и его сопряженное уравнение

$$\tilde{L}_3[z]\equiv-(b_0z)'''+(b_1z)''-(b_2z)'+(b_3z)=0, \tag{6}$$

где b_0, b_1, b_2, b_3 – непрерывные функции независимой переменной t, которые имеют все встречающиеся в дальнейшем производные.

Если уравнения (5) и (6) являются антисамосопряженными, то имеется сохраняющееся величина

- первый интеграл вида [8]:

$$I_0 = b_0\left(yz'' - y'z' + zy''\right) - \left(b_0' - b_1\right)zy' + \left(2b_0' - b_1\right)yz' + \left(b_0'' - b_1' + b_2\right)yz\,, \tag{7}$$

который при подстановке $z = y$ принимает вид

$$2b_0yy'' - b_0(y')^2 + b_0'yy' + \left(b_0'' - b_1' + b_2\right)y^2 = C\,, \tag{8}$$

где C есть величина постоянная.

В выражение (8) подставим $y = u^2$ и $C = 0$, получим линейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$4b_0u'' + 2b_0'u' + \left(b_0'' - b_1' + b_2\right)u = 0 \tag{9а}$$

или

$$2b_0u'' + b_0'u' + \left(\frac{1}{2}b_2 - \frac{1}{4}b_0''\right)u = 0\,. \tag{9б}$$

При подстановке $y = w^2$ и $C \neq 0$ из соотношения (8) следует нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$2b_0w'' + b_0'w' + \left(\frac{1}{2}b_2 - \frac{1}{4}b_0''\right)w = \frac{C}{2w^3}\,. \tag{10}$$

В выражение для сохраняющейся величины (7) подставим $y = u^2$ и $z = w^2$, которые удовлетворяют, соответственно, уравнениям (9б) и (10), получим формулу для инвариантов вида

$$I_0 = \frac{C}{2}\left(\frac{u}{w}\right)^2 + 2b_0(wu' - uw')^2 \tag{11}$$

Уравнения (9), (10) и инварианты (11) являются обобщением результатов (2), (4) и (3), полученных в работе [2]. В самом деле, если положить

$$b_0 = \frac{1}{2}\varepsilon^2, \qquad b_2 = 2\Omega^2, \qquad C = 2 \tag{12}$$

и переобозначить функции $u \to q$, $w \to \rho$, то получим уравнения (2), (4), а также инварианты в виде (3), отличающиеся несущественным числовым коэффициентом.

Отметим, что если линейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка (9) имеет два линейно независимых решение u_1^2 и u_2^2, то фундаментальная система решений для антисамосопряженного линейного обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка (5) равна u_1^2, u_2^2, u_1u_2. Третье линейно независимое решение можно найти следующим образом (см., например [8]):

$$\sqrt{2b_0}\begin{vmatrix} u_1^2 & u_2^2 \\ (u_1^2)' & (u_2^2)' \end{vmatrix} = \sqrt{8b_0}\,u_1u_2(u_2u_1' - u_1u_2') = const \cdot u_1u_2\,. \tag{13}$$

Следовательно, нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка (10) может быть представлено в виде

$$w = \sqrt{A_1u_1^2 + A_2u_1u_2 + A_3u_2^2}\,, \tag{14}$$

где A_1, A_2, A_3 - произвольные постоянные. Это воспроизводит результаты работ [4,6].

Выводы и перспективы дальнейших исследований. Нами показано, что нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение (10), частный случай (4) которого возникает в различных областях математики и математической физики является одним из следствий общей теории сопряженных обыкновенных дифференциальных уравнений. В дальнейшем планируется применить описанный формализм к решению других задач, в частности, к исследованию одномерного уравнения Шредингера, а также к системам, описываемым дифференциальными уравнениями четвертого порядка.

Авторы выражают глубокую искреннюю благодарность профессорам И.В. Мельнику, О.В. Шоман и И.С. Козловской за помощь в получении оттисков работ киевского математика В.П. Ермакова и Л.М. Берковича совместно с Н.Х. Розовым.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Lewis H.R. Jr. Classical and quantum systems with time-dependent harmonic-oscillator-type Hamiltonians / H.R. Lewis, Jr. - Phys. Rev. Let., v.18, No.13. - 1967. - p.510-512.
2. Kruskal M. Asimptotic theory of Hamiltonian and other systems with all solutions nearly periodic / M. Kruskal. – J. Math. Phys., v.3. - 1962. - p.806-828.
3. Milne W.E. The numerical determination of characteristic numbers / W.E. Milne. - Phys. Rev. v.35. - 1930. - p.863-867.
4. Pinney E. The nonlinear differential equation $y'' + p(x)y + cy^{-3} = 0$ / E. Pinney . - Proc. Amer. Math. Soc., v.1. - 1950. - p.681.
5. Berkovich L.M. Transformations of linear differential equations of second order and adjoined nonlinear equations / - Archivum Math. (Brno), v.33, No.2. - 1997. - p.75-98.
6. Беркович Л.М., Розов Н.Х. Некоторые замечания о дифференциальных уравнений вида $y'' + a_0(x)y = \varphi(x)y^{\alpha}$ / Л.М. Беркович, Н.Х. Розов. - Дифф. уравнения, т.VIII, №11. - 1972. - с.2076-2079.
7. Ермаков В.П. Дифференциальные уравнения второго порядка. Условия интегрируемости в конечном виде / В.П. Ермаков. - Университетские известия, Киев, №9. - 1880. - с.1-25.
8. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения, т.1. / Дж. Сансоне. - М.: Ил, 1954. - 416с.

ЧЕКАНОВА Наталья Николаевна – к.ф.-м.н., старший преподаватель кафедры высшей математики Украинской инженерно-педагогической академии.

Научные интересы:

– классическая и квантовая механика, математическое моделирование.

ЧЕКАНОВ Николай Александрович – д.ф.-м.н., профессор кафедры информационно-компьютерных технологий в деятельности ОВД Белгородского юридического института МВД России

Научные интересы:

– классическая и квантовая механика, динамический хаос, дифференциальные уравнения, уравнение Шредингера, математическое моделирование.