

### СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ТРЕУГОЛЬНЫХ И ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНЫХ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

**Постановка проблемы.** Одним из наиболее актуальных направлений развития современной науки и техники является применение методов математического моделирования при проектировании и анализе состояния современных деталей и конструкций. При построении математических моделей на практике часто возникают дифференциальные уравнения в частных производных, отыскание аналитического решения которых весьма затруднительно (особенно в случае сложных инженерных конструкций). В таких случаях, как правило, используют вычислительные методы, одним из самых распространенных среди которых является метод конечных элементов.

В основе метода конечных элементов [1-3] лежит идея аппроксимации искомой непрерывной величины (например, температуры, перемещения или другой) при помощи кусочно непрерывных функций, определенных на элементарных геометрических областях – конечных элементах, которые образуют дискретную модель области. Для определения значений искомой непрерывной величины в узлах дискретной модели строится система линейных алгебраических уравнений, матрица которой носит название глобальной матрицы жесткости. При этом выбор формы элемента и качество дискретизации исходной области оказывают влияние на точность решения. Таким образом, целью предложенной статьи является сравнение точности решения прикладных задач теории упругости методом конечных элементов на базе наиболее распространенных типов конечных элементов: треугольников и четырехугольников.

**Теоретический анализ.** Наиболее распространенными на практике конечными элементами являются треугольники и четырехугольники – на плоскости, тетраэдры и шестигранники – в трехмерном пространстве. Преимуществом использования треугольников и тетраэдров, которые часто именуются симплексом, является их топологическая гибкость при построении дискретизации сложной конструкции или объекта. Преимуществом использования четырехугольников и шестигранников является возможность уменьшения размерности систем линейных алгебраических уравнений за счет использования меньшего количества элементов (необходимо использовать пять тетраэдров для представления элемента объема, представленного одним шестигранником).

Однако использование четырехугольных и шестигранных конечных элементов в методе конечных элементов позволяет получить более точное решение при меньшем количестве узлов. Действительно, функции формы линейного треугольного и тетраэдрического конечного элемента имеют вид

$$N_A(x, y) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y, \quad \alpha_i \in R, \quad i = \overline{0, 2}, \quad (1)$$

$$N_T(x, y, z) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z, \quad \alpha_i \in R, \quad i = \overline{0, 3}, \quad (2)$$

в то время, как функции формы линейных четырехугольных и шестигранных элементов имеют вид

$$N_Q(x, y) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 xy, \quad \alpha_i \in R, \quad i = \overline{0, 3}, \quad (3)$$

$$N_H(x, y, z) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + \alpha_4 xy + \alpha_5 xz + \alpha_6 yz + \alpha_7 xyz, \quad \alpha_i \in R, \quad i = \overline{0, 7}. \quad (4)$$

Наличие нелинейных членов в соотношениях (3) и (4) приводит к тому, что градиенты четырехугольного и шестигранного конечных элементов (в отличие от треугольного и тетраэдрического) не постоянны и изменяются вдоль одной из координатных плоскостей (координатных прямых на плоскости). Таким образом, применение четырехугольных и шестигранных конечных элементов считается более предпочтительным в вычислительном плане.

Решение задач теории упругости. Формула для вычисления локальной матрицы жесткости  $[K^e]$  в плоских задачах теории упругости имеет вид

$$[K^e] = \iint B^T D B dx dy, \quad (5)$$

где  $D$  – матрица упругости, которая для плоского деформированного состояния в изотропном материале определяется формулой

$$D = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

матрица  $B$  для треугольного конечного элемента

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_{\Delta,1}}{\partial x} & \frac{\partial N_{\Delta,2}}{\partial x} & \frac{\partial N_{\Delta,3}}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_{\Delta,1}}{\partial y} & \frac{\partial N_{\Delta,2}}{\partial y} & \frac{\partial N_{\Delta,3}}{\partial y} \\ \frac{\partial N_{\Delta,1}}{\partial y} & \frac{\partial N_{\Delta,2}}{\partial y} & \frac{\partial N_{\Delta,3}}{\partial y} & \frac{\partial N_{\Delta,1}}{\partial x} & \frac{\partial N_{\Delta,2}}{\partial x} & \frac{\partial N_{\Delta,3}}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

для четырехугольного конечного элемента:

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_{Q,1}}{\partial x} & \frac{\partial N_{Q,2}}{\partial x} & \frac{\partial N_{Q,3}}{\partial x} & \frac{\partial N_{Q,4}}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_{Q,1}}{\partial y} & \frac{\partial N_{Q,2}}{\partial y} & \frac{\partial N_{Q,3}}{\partial y} & \frac{\partial N_{Q,4}}{\partial y} \\ \frac{\partial N_{Q,1}}{\partial y} & \frac{\partial N_{Q,2}}{\partial y} & \frac{\partial N_{Q,3}}{\partial y} & \frac{\partial N_{Q,4}}{\partial y} & \frac{\partial N_{Q,1}}{\partial x} & \frac{\partial N_{Q,2}}{\partial x} & \frac{\partial N_{Q,3}}{\partial x} & \frac{\partial N_{Q,4}}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad (8)$$

$E$  – модуль Юнга,  $\nu$  – коэффициент Пуассона.

**Вычислительный эксперимент.** С целью практического сравнения конечных элементов разных форм рассмотрим несколько вычислительных экспериментов, которые базируются на использовании сеток треугольников и четырехугольников на одном наборе опорных узлов (при этом сетка на базе треугольников содержит вдвое большее число конечных элементов).

1. Изгиб консоли, нагруженной на конце. Консоль, имеющая узкое (относительно длины) поперечное сечение единичной толщины и изгибаемая силой  $P$ , приложенной на конце (рис. 1).

В результате вычислительного эксперимента при  $P = 200$  МН,  $E = 203200$  МПа,  $\nu = 0,27$ ,  $l = 10$  м,  $c = 2$  м получено значение прогиба для нагруженного конца равным  $0,063019$  м для сетки треугольных элементов и равным  $0,061624$  м для сетки четырехугольных элементов, в то время, как известное аналитическое решение [4] его определяет формулой  $Pl^3 / (3EI) = 0,061516$  м (погрешность, соответственно,  $2,44\%$  для треугольников и  $0,18\%$  для четырехугольников).

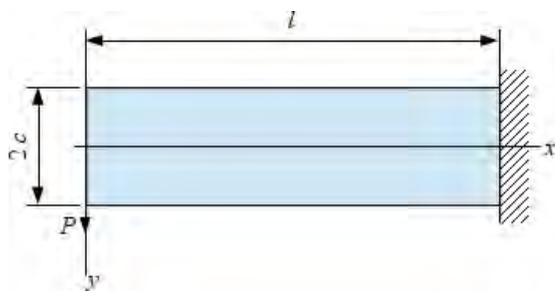


Рис. 1. Изгиб консоли, нагруженной на конце

Максимальное отклонение численного от аналитического решения равно  $0,135551$  м (треугольные конечные элементы) и  $0,135551$  м (четыреугольные элементы) для перемещений в направлении оси  $Ox$ , соответственно,  $0,032755$  м и  $0,019785$  м для перемещений в направлении оси  $Oy$  (рис. 2),  $0,28246$  МПа (треугольники) и  $0,078762$  МПа (четыреугольники) для напряжений  $\sigma_x$ .

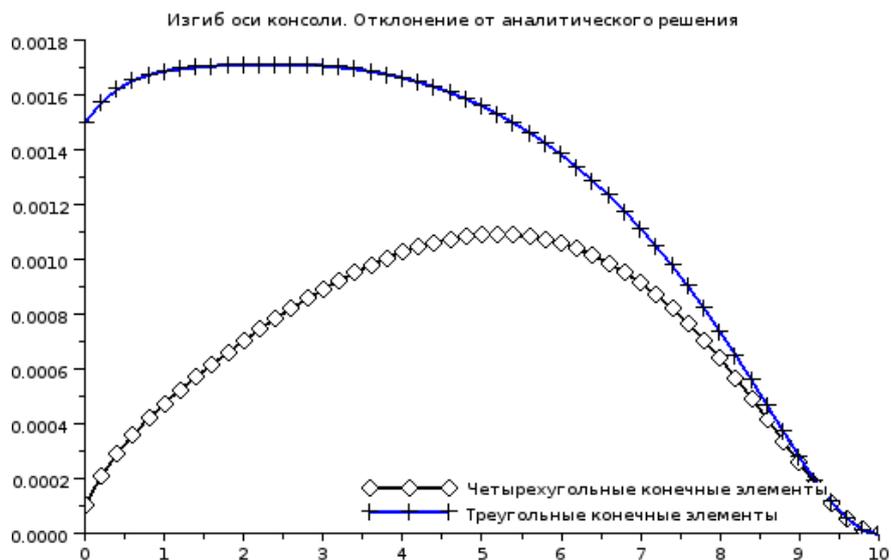


Рис. 2.

2. Изгиб балки равномерной нагрузкой. Балка узкого (относительно длины) поперечного сечения, опертая на концах, изгибается равномерно распределенной нагрузкой  $q$  (рис. 3). Прогиб в центре балки определяется формулой [4]  $\frac{5}{24} \frac{ql^4}{EI} \left[ 1 + \frac{12}{5} \frac{c^2}{l^2} \left( \frac{4}{5} + \frac{\nu}{2} \right) \right]$  и равен 0,418565 м при  $q = 200$  МН/м,  $l = 10$  м,  $c = 2$  м,  $E = 203200$  МПа,  $\nu = 0,27$ .

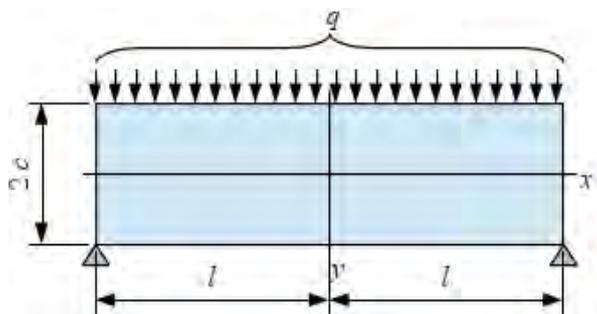


Рис. 3. Изгиб балки равномерной нагрузкой

В результате численного решения значение прогиба в центре балки равно 0,436108 м (погрешность 4,19%) при использовании треугольных конечных элементов и 0,416593 м (погрешность 0,47%) при использовании четырехугольных конечных элементов (отклонение численного оценки прогиба оси балки от аналитического решения приведено на рис. 4). При этом максимальное отклонение численного от аналитического решения для напряжений 0,999092 МПа и 0,364410 МПа, соответственно, для треугольных и четырехугольных конечных элементов.

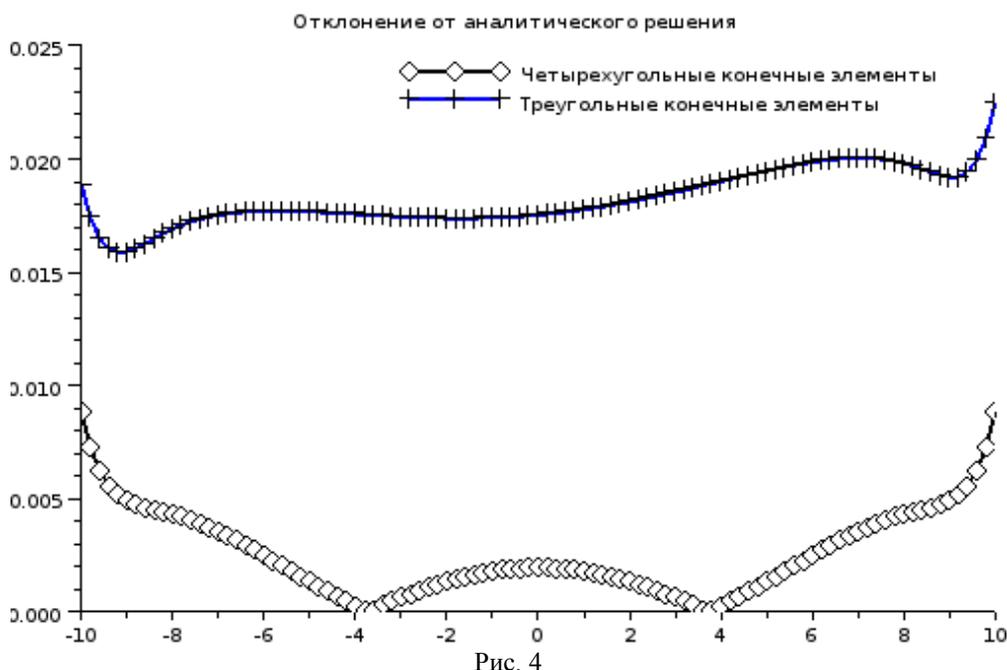


Рис. 4

3. Изгиб кривого бруса силой, приложенной на конце. Стержень узкого прямоугольного поперечного сечения с осью в форме дуги круга закреплен на стороне  $x = 0$  и изгибается силой  $P$  приложенной вдоль стороны  $y = 0$ .

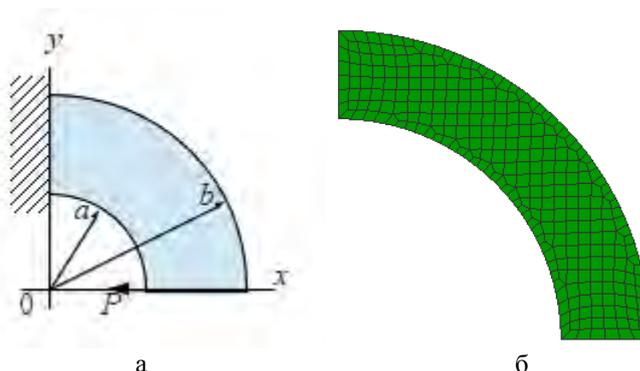


Рис. 5. Изгиб кривого бруса: а – постановка задачи, б – дискретная модель ( $a = 0,5$  м,  $b = 0,7$  м, 345 узлов, 296 элементов)

Прогиб нагруженного конца бруса при  $a = 0,5$  м,  $b = 0,7$  м,  $P = 50$  МН,  $E = 203200$  МПа,  $\nu = 0,27$  будет равным [4] 
$$-\frac{P\pi(a^2 + b^2)}{E\left[(a^2 - b^2) + (a^2 + b^2)\ln\frac{b}{a}\right]} = -0,063635$$
 м. При этом для прогиба

нагруженного конца метод конечных элементов на базе нерегулярной сетки треугольных элементов дает значение равное  $-0,056160$  м (погрешность 11,75%), неструктурированная сетка четырехугольных элементов  $-0,057956$  м (погрешность 8,92%).

**Выводы и перспективы дальнейших исследований.** Таким образом, вычислительные эксперименты, в которых решены классические задачи теории упругости, показали, что четырехугольные конечные элементы дают более точное решение в сравнении с треугольными при использовании простейших типов функций формы. Перспективными исследованиями в данном направлении является расширение спектра задач для сравнительного анализа (решение трехмерных задач упругости, переноса и тока жидкости, вязкоупругости и прочих), сравнение данных типов конечных элементов при использовании более сложных функций формы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Zienkiewicz O.Z. The Finite Element Method. Volume 1: The Basis / O.Z. Zienkiewicz, R.L. Taylor. – Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000. – 689 p.
2. Zienkiewicz O.Z. The Finite Element Method. Volume 2: Solid Mechanics / O.Z. Zienkiewicz, R.L. Taylor. – Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000. – 459 p.
3. Smith I.M. Programming the finite element method / I.M. Smith, D.V. Griffiths. – Chichester: Wiley, 2004. – 628 p.
4. Тимошенко С.П. Теория упругости / С.П. Тимошенко, Дж. Гудьер. – М.: Наука, 1975. – 576 с.

ЧОПОРОВ Сергей Викторович – к.т.н., старший преподаватель кафедры математического моделирования Запорожского национального университета.

Научные интересы:

- математическое моделирование;
- системы автоматизированного проектирования;
- вычислительные методы;
- информационные технологии.

ГОМЕНЮК Сергей Иванович – д.т.н., профессор, декан математического факультета Запорожского национального университета.

Научные интересы:

- математическое моделирование;
- системы автоматизированного проектирования;
- вычислительные методы;
- информационные технологии.

ЛИСНЯК Андрей Александрович – к.ф.-м.н., старший преподаватель кафедры математического моделирования Запорожского национального университета.

Научные интересы:

- математическое моделирование;
- системы автоматизированного проектирования;
- вычислительные методы;
- информационные технологии.