

УДК 004.942

Д.Г. ЗЕЛЕНЦОВ, Л.В. НОВИКОВА, О.Р. ДЕНИСЮК,

Государственное высшее учебное заведение "Украинский государственный химико-технологический университет",
г. Днепропетровск**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СЕЧЕНИЙ ЭЛЕМЕНТОВ ШАРНИРНО-СТЕРЖНЕВЫХ КОНСТРУКЦИЙ, ПОДВЕРЖЕННЫХ ВОЗДЕЙСТВИЮ АГРЕССИВНЫХ СРЕД**

Работа посвящена описанию математических моделей корродирующих сечений элементов шарнирно-стержневых систем (ШСС), изготовленных из стандартных прокатных профилей (двутавр, швеллер, уголок). Предложено решение задачи идентификации параметров модельных сечений по критерию совпадения основных геометрических характеристик модельного и эталонного сечений в произвольный момент времени.

Ключевые слова: коррозионный износ, модель сечения, задача идентификации параметров.

Д.Г. ЗЕЛЕНЦОВ, Л.В. НОВИКОВА, О.Р. ДЕНИСЮК,

Державний вищий навчальний заклад "Український державний хіміко-технологічний університет", м. Дніпропетровськ

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ПЕРЕРІЗІВ ЕЛЕМЕНТІВ ШАРНІРНО-СТЕРЖНЕВИХ КОНСТРУКЦІЙ, ЩО ПІДЛЯГАЮТЬ ДІЇ АГРЕСИВНИХ СЕРЕДОВИЩ

Робота присвячена опису математичних моделей кородуючих перетинів елементів шарнірно-стержневих систем (ШСС), що виготовлені зі стандартних прокатних профілів (двутавр, швелер, кутник). Запропоновано вирішення задачі ідентифікації параметрів модельних перетинів за критерієм збігу основних геометричних характеристик модельного та еталонного перетинів у довільний момент часу.

Ключові слова: корозійний знос, модель перетину, задача ідентифікації параметрів.

D.G. ZELENTSOV, L.V. NOVIKOVA, O.R. DENYSIUK

State Higher Educational Institution "Ukrainian state university of chemical technology", Dnepropetrovsk

MATHEMATICAL MODELS OF SECTIONS OF ELEMENTS OF HINGED-ROD STRUCTURES INFLUENCED BY AGGRESSIVE ENVIRONMENTS

This work describes mathematical models of corroding sections of elements of hinged-rod systems made of standard rolled shapes (I-beam, U-beam, L-beam). The solution of parameter identification problem for model sections using concurrence criteria for main geometrical characteristics of model and reference sections in random moment of time is proposed.

Keywords: corrosive wear, model of section, parameter identification problem.

Постановка проблемы

Металлические стержневые конструкции широко используются в различных отраслях промышленности, что обуславливает повышенные требования к их надёжности и долговечности. Часто такие конструкции эксплуатируются в условиях контакта с агрессивными технологическими средами. Воздействие агрессивных сред вызывает коррозию металла – разрушение его поверхностного слоя, изменение начальных геометрических размеров и, как следствие, снижение несущей способности. Для обоснованного назначения геометрических параметров проектируемой конструкции с целью обеспечения её безотказной работы в течение заданного периода времени необходимо наличие математической модели процесса деформирования конструкции в агрессивной среде.

Математическая модель процесса деформирования корродирующей конструкции включает в себя, в том числе, модель корродирующей поверхности или сечения. В связи с этим задача построения модели корродирующего сечения становится весьма актуальной. Данная модель должна адекватно описывать процесс изменения площади, периметра и момента инерции сечения во времени и быть удобной в использовании.

Анализ последних исследований и публикаций

При решении классических задач строительной механики стержневых конструкций проблема создания моделей сечений стержней не возникала, так как основные геометрические характеристики сечений, необходимые для расчетов, приводились в справочной литературе.

По мере развития механики корродирующих конструкций, как отдельного направления строительной механики, возникла необходимость описания процесса изменения характеристик сечения во времени. Данный процесс зависит от внешних условий (агрессивной среды), параметров самой конструкции и её напряжённо-деформированного состояния. В связи с этим стала очевидной необходимость создания моделей корродирующих сечений стержней, которая остаётся актуальной до настоящего времени.

Следует отметить, что данная проблема практически не нашла отражения в известной литературе. Объясняется это тем, что в работах раннего периода становления и развития механики корродирующих конструкций в качестве объектов исследований принимались абстрактные стержневые конструкции (например, со стержнями кругового, кольцевого или квадратного сечений). Данные работы носили, в основном, теоретический характер и имели своей целью определение некоторых общих закономерностей поведения корродирующих конструкций во времени. При этом реальная форма сечения не учитывалась [1-3].

Для анализа поведения корродирующих ШСС, изготовленных из стандартных профилей (двутавра, швеллера, уголка), в [4, 5] были использованы новые модели сечений, которые представлялись в виде совокупности прямоугольных фрагментов. Их недостатком являлось то, что при внешнем подобии модельного и реального профилей, модельные профили не учитывали радиусы закругления и углы наклона полок. В известных работах не встречалось каких-либо правил задания размеров модельных сечений таким образом, чтобы процесс коррозии (изменение площади, периметра и момента инерции во времени) происходил так же, как в реальных сечениях. Именно поэтому непосредственное использование существующих моделей сечений не позволяло построить адекватную модель поведения реальных ШСС в агрессивных средах.

Формулировка цели исследования

Целью настоящей работы является описание методики определения размеров модельных сечений так, чтобы изменения во времени основных характеристик реального и модельного сечений были одинаковыми. Решение данной проблемы предполагает построение эталонной модели корродирующего сечения.

Изложение основного материала исследования

Решение поставленной проблемы покажем на примере сечения стержня двутаврового профиля.

Сечение двутаврового профиля, как отмечалось выше, представлялось в виде совокупности прямоугольных фрагментов и определялось четырьмя параметрами B, H, D, T (рис. 1). Процесс коррозии моделировался путем изменения размеров прямоугольников на одну и ту же (в пределах стержня) величину δ – глубину коррозионного поражения (в дальнейшем модель А). Размеры сечения реального двутаврового профиля характеризуются семью параметрами: высотой двутавра H , шириной полки B , толщиной стойки D , средней толщиной полки T , радиусами закругления R_1 и R_2 и углом уклона внутренних граней полок α (рис. 2).

Таблица 1

Сравнительные характеристики сечений эталонного и модельного профилей

№ профиля	B	H	D	T	R_2	R_1	$A_{табл}$	A_M	$I_{табл}$	I_M	ε_A	ε_I
	см						см ²		см ⁴		%	
10	5,5	10,0	0,45	0,72	0,7	0,25	12,0	11,77	17,9	20,03	1,9	11,90
14	7,3	14,0	0,49	0,75	8,0	0,30	17,4	17,07	41,9	48,75	1,9	16,35
18	9,0	18,0	0,51	0,81	0,90	0,35	23,4	22,93	82,6	98,60	2,0	19,37
22	11,0	22,0	0,54	0,87	1,00	0,40	30,6	30,08	157,0	193,26	1,7	23,09
27	12,5	27,0	0,60	0,98	1,10	0,45	40,2	39,52	260,0	319,46	1,7	22,87
30	13,5	30,0	0,65	1,02	1,20	0,50	46,5	45,71	337,0	418,90	1,7	24,30

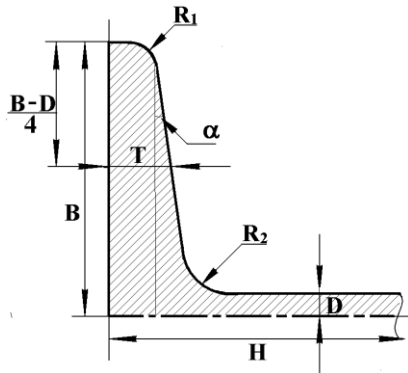


Рис. 1. Фрагмент реального двутаврового сечения

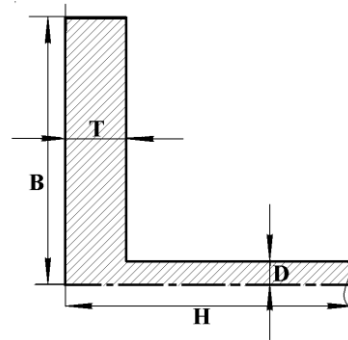


Рис. 2. Фрагмент модельного двутаврового сечения

В табл.1 приведены параметры двутавровых профилей, табличные значения их площадей и моментов инерции, соответствующие значения модельных сечений и значения их погрешностей.

Рассмотрим эталонную модель корродирующего сечения.

Представим двутавровое сечение в виде совокупности треугольных фрагментов (рис. 3) согласно алгоритму, приведенному в [6]. Координаты точек на контуре сечения определяются через параметры реального сечения (рис. 4).

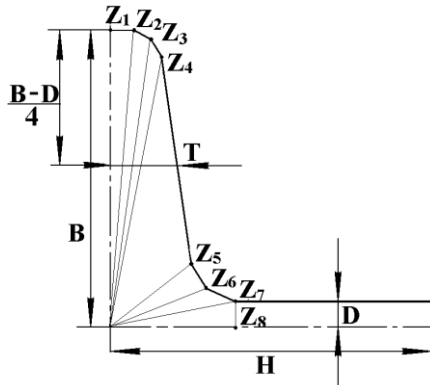


Рис. 3. Модель сечения в виде совокупности треугольных фрагментов

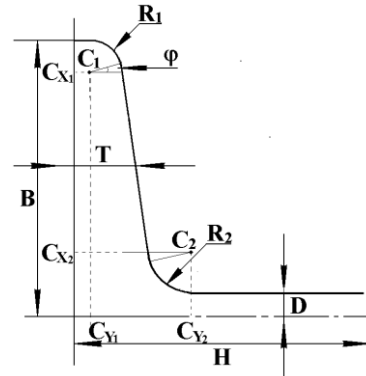


Рис. 4. Параметры реального двутаврового сечения

Центры окружностей C1 и C2 имеют координаты:

$$Cx_1 = \frac{B}{2} - R_1; \quad Cy_1 = T - R_1 - tg\alpha \cdot \left(\frac{B-D}{4} - R_1 \right) \quad (1)$$

$$Cx_2 = \frac{D}{2} + R_2; \quad Cy_2 = T + R_2 + tg\alpha \cdot \left(\frac{B-D}{4} - R_2 \right) \quad (2)$$

Здесь $\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha$.

Значения координат точек контура приведены в таб. 2.

Таблица 2

Координаты точек контура эталонного сечения

№ точки	x	y	№ точки	x	y
Z ₁	Cx ₁ + R ₁	0	Z ₅	Cx ₂ - R ₂ · cos φ	Cy ₂ - R ₂ · sin φ
Z ₂	Cx ₁ + R ₁	Cy ₁	Z ₆	Cx ₂ - R ₂ · cos $\frac{\varphi}{2}$	Cy ₂ - R ₂ · sin $\frac{\varphi}{2}$
Z ₃	Cx ₁ + R ₁ · cos $\frac{\varphi}{2}$	Cy ₁ + R ₁ · sin $\frac{\varphi}{2}$	Z ₇	Cx ₂ - R ₂	Cy ₂
Z ₄	Cx ₁ + R ₁ · cos φ	Cy ₁ + R ₁ · sin φ	Z ₈	0	Cy ₂

Площадь A_i , момент инерции J_{y_i} треугольного фрагмента относительно оси X и расстояние между соседними точками контура вычисляются по следующим формулам:

$$P_i = \sqrt{(Zx_{i+1} - Zx_i)^2 + (Zy_{i+1} - Zy_i)^2}, \quad i = \overline{1, 7}; \quad (3)$$

$$I_{y_i} = \frac{1}{12} (Zx_i^2 + Zx_i \cdot Zx_{i+1} + Zx_{i+1}^2) \cdot A_i, \quad i = \overline{1, 7}; \quad (4)$$

$$d_i = \sqrt{(Zx_{i+1} - Zx_i)^2 + (Zy_{i+1} - Zy_i)^2}, \quad i = \overline{1, 7}. \quad (5)$$

Окончательно характеристики сечения определяются следующим образом:

$$A = 4 \cdot \sum_{i=1}^7 A_i + D \cdot (H - 2 \cdot Cy_2) \quad (6)$$

$$P = 4 \cdot \sum_{i=1}^7 d_i + 2 \cdot (H - 2 \cdot Cy_2) + 2 \cdot B \quad (7)$$

$$I_y = 4 \cdot \sum_{i=1}^7 J_{y_i} + \frac{D^3 \cdot (H - 2 \cdot Cy_2)}{12} \quad (8)$$

Процесс коррозии моделируется путём изменения радиусов на величину δ .

$$\begin{cases} R_1(\delta) = R_1 - \delta \\ R_2(\delta) = R_2 + \delta \\ Z_i = Z_i(R_1, R_2) \end{cases} \quad (9)$$

Данная эталонная модель, в дальнейшем – модель (В), позволяет максимально точно моделировать процесс коррозии сечения двутавра, но при этом менее удобна в реализации, чем предложенная ранее.

Сформулируем математическую постановку задачи, как задачи идентификации параметров модели [7]. В качестве критерия примем оценку степени совпадения выходных параметров, получаемых с помощью модели (А) и эталонной модели (В), а в качестве параметров управления – параметры модели (А).

Модель (А) характеризуется четырьмя параметрами: $\bar{x} = (B, H, D, T)$, модель (В) – семью параметрами: $\bar{y} = (B, H, D, T, R_1, R_2, \alpha)$.

Необходимо определить параметры \bar{x} так, чтобы выполнялись следующие условия:

$$\begin{cases} A_{et}^0(\bar{x}) = A_M^0(\bar{y}) \\ P_{et}^0(\bar{x}) = P_M^0(\bar{y}) \\ I_{et}^0(\bar{x}) = I_M^0(\bar{y}) \\ \frac{dI_{et}(\bar{x})}{dt} = \frac{dI_M(\bar{y})}{dt} \\ \frac{dI_{et}(\bar{x})}{dt} = \frac{dI_M(\bar{y})}{dt} \end{cases} \quad (10)$$

Система уравнений (10) содержит пять уравнений при том, что количество параметров модели (А) равно четырём. Представим площадь сечения как

$$A(t) = A^0 - P^0 \delta(t) + s_k \delta^2(t), \quad (11)$$

где s_k – коэффициент формы сечения ($k = 1$ для модели (А), $k = 2$ для модели (В)).

Проинтегрируем выражение (9):

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{d\delta} \cdot \frac{d\delta}{dt} = (-P^0 + 2 \cdot s_k \delta) \cdot \frac{d\delta}{dt}, \quad (12)$$

Следовательно, при соблюдении первых двух условий системы (10), значения производных функций площадей по времени будут совпадать с точностью до $2 \cdot \delta \cdot s_k$. С учётом того, что $\delta \ll P^0$ и значения s_1 и s_2 близки, можно считать, что выполнение данных условий приведёт к выполнению четвёртого условия системы (10). Таким образом, система будет содержать только четыре уравнения

$$\begin{cases} A_{et}^0(\bar{x}) = A_M^0(\bar{y}) \\ P_{et}^0(\bar{x}) = P_M^0(\bar{y}) \\ I_{et}^0(\bar{x}) = I_M^0(\bar{y}) \\ \frac{dI_{et}(\bar{x})}{dt} = \frac{dI_M(\bar{y})}{dt} \end{cases} \quad (13)$$

Формулы для вычисления основных характеристик сечений для модели (А): площади A_M , периметра P_M и момента инерции I_M приведены в [4].

Последнее уравнение системы (13) не имеет аналитического представления, что делает затруднительным применение традиционных методов решения систем нелинейных уравнений.

Более целесообразным и удобным представляется использование методов безусловной оптимизации. Целевая функция имеет следующий вид:

$$F(\bar{y}) = \left(1 - \frac{P_M^0(\bar{y})}{P_{et}^0}\right)^2 + \left(1 - \frac{A_M^0(\bar{y})}{A_{et}^0}\right)^2 + \left(1 - \frac{I_M^0(\bar{y})}{I_{et}^0}\right)^2 + \left(1 - \frac{I_{Mt}'(\bar{y})}{I_{et}'}\right)^2 \rightarrow \min \quad (14)$$

Задача решалась методом случайного поиска. Результаты решения оптимизационной задачи представлены в табл. 3.

Таблица 3

Расчётные значения размеров модельных сечений

№ профиля	H_M , см	B_M , см	D_M , см	T_M , см
10	9,24512	5,33578	0,59829	0,69663
14	13,04495	7,09369	0,65732	0,69604
18	16,85726	8,74981	0,69547	0,73148
22	20,65596	10,70201	0,75599	0,76205
27	25,47405	12,16322	0,82184	0,85632
30	28,33864	13,13079	0,88473	0,88298

Покажем, что модель (А) с параметрами, найденными в результате решения системы (10), позволяет адекватно описывать процесс коррозии в сечении стержня, то есть так же, как и эталонная модель (В) с табличными размерами сечений.

Примем для определенности модель накопления геометрических повреждений следующего вида [8]:

$$\frac{d\delta}{dt} = v_0 \cdot (1 + k\sigma), \quad (15)$$

где v_0 – скорость коррозии ненагруженного материала, k – коэффициент влияния напряжения, σ – абсолютная величина напряжения.

Результаты сравнения геометрических характеристик эталонного и модельного сечений во времени и соответствующих напряжений в сечении приведены в таблице 4, для $v_0 = 0,1$ см/год, $k = 0,3$ МПа⁻¹.

Таблица 4

Изменение во времени характеристик эталонного и модельного сечений (расчётные значения модельного сечения)

t , лет	A_{et} , см ²	A_M , см ²	ε_A , %	I_{et} , см ⁴	I_M , см ⁴	ε_I , %	σ_{et} , МПа	σ_M , МПа
0,0000	12,133	12,132	0,0	17,78	17,78	0,0	60,000	60,003
0,4145	10,250	10,232	0,2	14,45	14,39	0,4	71,018	71,144
0,8290	8,327	8,290	0,4	11,30	11,23	0,6	87,416	87,808
1,2435	6,333	6,274	0,9	8,30	8,24	0,7	114,953	116,029
1,6580	4,192	4,105	2,1	5,37	5,37	0,0	173,641	177,334

Площадь A_{et} , момент инерции I_{et} и напряжение σ_{et} получены с помощью модели (В). Модельные площадь A_M , момент инерции I_M и напряжение σ_M получены с помощью модели (А) для параметров, представленных в табл. 3.

Сравнивая полученные результаты, можно сделать вывод, что погрешность основных характеристик сечения не превосходит 2,1%.

В табл. 5 представлены численные результаты решения той же модельной задачи, значения характеристик модельного профиля, получены с помощью переноса размеров реального профиля на модельный.

Таблица 5

**Изменение во времени характеристик эталонного и модельного сечений
(исходные значения модельного сечения)**

t, лет	A_{et} , см ²	A_M , см ²	ε_A , %	I_{et} , см ⁴	I_M , см ⁴	ε_I , %	σ_{et} , МПа	σ_M , МПа
0,0000	12,133	11,772	3,0	17,78	20,03	12,7	600,000	618,375
0,4145	10,250	9,738	5,0	14,45	16,32	12,9	710,179	747,535
0,8290	8,327	7,646	8,2	11,30	12,82	13,5	874,165	952,044
1,2435	6,333	5,446	14,0	8,30	9,48	14,2	1149,532	1336,733
1,6580	4,192	2,988	28,7	5,37	6,13	14,2	1736,406	2436,411

Из приведённых данных видно, что погрешность вычислений основных характеристик модельных сечений после определения размеров сечения согласно методике, приведенной в статье, на порядок ниже той же погрешности для исходных размеров модельного сечения.

Выводы

1. Предложена методика построения математических моделей корродирующих сечений элементов шарнирно-стержневых систем, изготовленных из стандартных прокатных профилей (двутавр, швеллер, уголок).
2. Впервые сформулирована постановка задачи определения геометрических параметров модельного сечения так, чтобы изменения во времени основных характеристик реального и модельного сечений были одинаковыми.
3. Для модельных прокатных профилей всех типов определены параметры сечений.
4. В результате численного эксперимента подтверждена высокая точность предложенной методики определения параметров сечения.

Список использованной литературы

1. Петров, В.В. Расчёт элементов конструкций, взаимодействующих с агрессивной средой. / В.В. Петров, И.Г. Овчинников, Ю.М. Шихов. – Саратов: Саратов. ун-т. – 1987. – 288 с.
2. Алексеенко Б.Г. О применении метода конечных элементов в расчётах прочности и долговечности стержневых систем, взаимодействующих с агрессивными средами. / Б.Г. Алексеенко, Ю.М. Почман // Theoretical Foundation of Civil engineering. – Warsaw, 1999. – P. 11 – 15.
3. Криворучко Т. М. Оптимальное проектирование стержневых систем, подверженных коррозии, с учетом долговечности. / Т.М. Криворучко // Работоспособность материалов и элементов конструкций при воздействии агрессивных сред. – Саратов: СПИ, – 1986. – С. 41 – 42.
4. Зеленцов Д.Г. Расчет конструкций с изменяющейся геометрией в агрессивных средах. Стержневые системы. / Д.Г. Зеленцов. – Днепропетровск: УГХТУ, – 2002. – 168 с.
5. Колесник И.А. Моделирование коррозионных процессов в стержнях при осевом растяжении и сжатии. / И.А. Колесник, Д.Г. Зеленцов, Ю.А. Храпач // Системні технології. [Регіональний міжвузівський збірник наукових праць]. – Дніпропетровськ. – Вип. 1(9). – 2000. – С. 49 – 55.
6. Мяченков В.И. Методы и алгоритмы расчёта пространственных конструкций на ЭВМ ЕС / В.И. Мяченков, В.П. Мальцев. – М.: Машиностроение, – 1984. – 280 с.
7. Норенков И.П. Основы автоматизированного проектирования. / И.П. Норенков // Учеб. для вузов. 2-е изд., перераб. и доп. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, – 2002. – 336 с.
8. Долинский В.М. Расчёт элементов конструкций, подверженных равномерной коррозии / В.М. Долинский // Исследования по теории оболочек. – Казань. – 1976. – № 7. – С. 37 – 42.