УДК 519.21

В.В. МАРАСАНОВ, А.О. ДЫМОВА
Херсонский национальный технический университет

МОДЕЛЬ ПРОСТРАНСТВА КОНТРОЛИРУЕМЫХ ПАРАМЕТРОВ НЕСТАЦИОНАРНОГО ДИНАМИЧЕСКОГО ОБЪЕКТА

Обоснована математическая модель выборочного пространства параметров, исходя из физических предпосылок, в виде множества случайных процессов со стационарными r-ми приращениями, имеющими стационарную взаимосвязь.

Ключевые слова: математическая модель, выборочное пространство состояний, пространство параметров, нестационарный динамический объект, восстановление информации, взаимосвязь параметров.

В.В. МАРАСАНОВ, Г.О. ДИМОВА
Херсонский национальный технический университет

МОДЕЛЬ ПРОСТОРУ ПАРАМЕТРІВ НЕСТАЦІОНАРНОГО ДИНАМІЧНОГО ОБ'ЄКТА, ЩО КОНТРОЛЮЮТЬСЯ

Обґрунтована математична модель вибіркового простору параметрів, виходячи з фізичних передумов, у вигляді множини випадкових процесів зі стаціонарними r-ми прирощеннями, які мають стаціонарний взаємозв'язок.

Ключові слова: математична модель, вибірковий простір станів, простір параметрів, нестаціонарний динамічний об'єкт, відтворення інформації, взаємозв'язок парметрів.

V.V. MARASANOV, A.O. DYMOVA
Kherson National Technical University

SPACE MODEL OF CONTROLLED PARAMETERS FOR NONSTATIONARY DYNAMIC OBJECT

Grounded mathematical model of the sample space of parameters based on the physical premises, in the form of a set of random processes with stationary r-th increments, that have a stationary relationship.

Keywords: mathematical model, the sample space of states, the parameter space, transient dynamic object, the recovery of information, the interlink of parameters/

Постановка проблемы

При стендовых испытаниях динамических объектов контролируется согласно программы испытаний определенное множество параметров, которые на переходных режимах, как правило, имеют вид нестационарных случайных процессов, информация о которых в отдельных случаях пропадает.

Анализ последних исследований и публикаций

Задача восстановления пропавшей информации на малых интервалах может быть решена детерминированными методами с помощью интерполяционных и экстраполяционных формул Лагранжа, Ньютона и др. [1, 2].

При статистическом подходе решение задачи восстановления методами экстраполяции и интерполяции Колмогорова-Винера на интервалах, превышающих интервалы автокорреляции восстанавливаемой функции, приводит к большим ошибкам. Энергетические возможности любого динамического объекта конечны и, следовательно, конечны приращения величин нарастания и убывания параметров выборочного пространства контролируемых параметров (скоростей – первых разностей, ускорений – вторых разностей и т.д.).

Из предположения о неизменной функциональной связи между параметрами (например, для термодинамических процессов – адиабатические, изотермические, изобарические) примем для построения математической модели наличие стационарной связанности между приращениями выборочного пространства параметров.

На основании этого сформулируем математическую модель множества измеряемых параметров [1, 6].

Формулировка цели исследования

Для математического решения задачи восстановления потерянной информации требуется, во-первых, создать физическую модель исследуемого процесса, во-вторых, на основании физической модели построить математическую модель, удовлетворяющую некоторым критериям, и, в-третьих, аналитически или численно решить поставленную математическую задачу.

Изложение основного материала исследований

Рассматривается динамический объект, на выходе которого n-мерное пространство параметров Ω^n (точки которого будем обозначать ω^n) со следующими свойствами. В Ω^n задано борелевское поле подмножеств, содержащее также само Ω^n, и на этом поле определена вполне аддитивная неотрицательная функция множества P, такая, что $P(\Omega^n) = 1$, называемая вероятностной мерой на Ω^n. Вещественные функции $\varphi(\omega^n)$,заданные на Ω^n и измеряемые относительно P, называются случайными величинами.

В пространстве случайных величин определены оператор среднего значения (математическое ожидание) и операторы среднего значения для всех степеней $\varphi(\omega^n)$ (начальные моменты), задаваемые равенствами

$$M\varphi(\omega^n) = \int_{\Omega} \varphi(\omega^n)\, dP(\omega^n) = \alpha_1 ,$$

$$M\left[\varphi(\omega^n)\right]^i = \int_{\Omega} \varphi^i(\omega^n)\, dP(\omega^n) = \alpha_i . \tag{1}$$

Случайные величины $\varphi_j(\omega^n)$ считаются стохастически зависимыми, то есть при любом выборе q борелевских множеств $E_1^m, E_2^m, \ldots, E_q^m$ в вещественном пространстве Ω^n будет иметь место неравенство (2)

$$P\left\{\varphi(\omega^m) \in E_j^m;\ j = \overline{1,q}\right\} \neq \prod_{j=1}^{q} P\left\{\varphi(\omega^m) \in E_j^m\right\}. \tag{2}$$

На прямом произведении пространства Ω^n и однопараметрического пространства $-\infty < T < \infty$ определены функции двух переменных $\varphi(t,\ \omega^n)$ таким образом, что при фиксированном $t = t_i$, $\varphi(t_i,\ \omega^n)$ должна быть измеримой функцией ω^n (т.е. случайной величиной).

Для функций $\varphi(t,\ \omega^n)$ введены операторы квантования по уровню и по времени:

$$A\{\varphi(t,\omega^n)\} = \varphi[t, k_1(\delta_1 \omega^n)] \tag{3}$$

$$B\{\varphi(t,\omega^n)\} = \varphi[k_2(\delta_2 t), \omega^n)] \tag{4}$$

$$AB\{\varphi(t,\omega^n)\} = \varphi[k_2(\delta_2 t), k_1(\delta_1 \omega^n)],\ \ k_1, k_2 = 0,1,2,\ldots , \tag{5}$$

где $(\delta_1 \omega^n)$ – элементарный n-мерный объем;

$(\delta_2 t)$ – элементарный (единичный) интервал времени.

Введение операторов A и B соответствует переходу к выборочному пространству Ω_1^n меньшей мощности, но той же размерности и к переходу от непрерывной случайной функции $\varphi_j(t,\omega^n);\ j = \overline{1,n}$ к случайной функции с дискретным аргументом и конечной счетной областью определения аргументов, или к временному ряду [4].

$$\{\varphi_j\} = \{\varphi_j[k_2(\delta_2 t), k_1(\delta_1 \omega^n)]\} , \tag{6}$$

Временной ряд (6) является в общем случае нестационарным векторным рядом. Для временного ряда $\{\varphi_j\}$ введем разностный оператор Δ:

$$\Delta \varphi_{j,\nu} = \varphi_{j,\nu+1} - \varphi_{j,\nu} , \tag{7}$$

где $\varphi_{j,\nu+1}$ è $\varphi_{j,\nu}$ – последующий ($\nu + 1$)-й и предыдущий ν-й члены ряда.

Аналогично, применив оператор Δ к $\{\Delta\varphi_j\}$, получим $\{\Delta^2\varphi_j\}$ и т.д. при этом $\Delta^r = \Delta(\Delta^{r-1})$, где $\Delta^1 = \Delta$. Для удобства полагаем $\Delta^0\{\varphi_j\} = \{\varphi_j\}$.

Простая индукция показывает, что

$$\Delta^0 \varphi_{j,\nu} = \sum_{k=0}^{r} C_r^k (-1)^{r+k} \varphi_{1,\nu+k} \ , \qquad (8)$$

где C_r^k – число сочетаний из r по k.

Формула (8) допускает обращение: можно выразить $\varphi_{j,\nu}$ через разности, стоящие слева в (8). В самом деле

$$\varphi_{j,\nu} = -\Delta\varphi_{j,\nu} + \varphi_{j,\nu+1} \, . \qquad (9)$$

Применяя (9) к $\Delta\varphi_{j,\nu}$ и $\varphi_{j,\nu+1}$, получаем

$$\varphi_{j,\nu} = \Delta^2 \varphi_{j,\nu} - 2\Delta\varphi_{j,\nu+1} + \varphi_{j,\nu+1} \, .$$

Продолжая таким же образом, приходим к тождеству

$$\varphi_{j,\nu} = \sum_{k=0}^{r} C_r^k (-1)^{r+k} \varphi_{1,\nu+k}, \quad r = 1, 2, \ldots . \qquad (10)$$

При $r - k = 1$

$$\varphi_{j,\nu} = \varphi_{j,0} + \sum_{i=1}^{\nu} \Delta\varphi_{j,i} \, . \qquad (11)$$

В силу допущения о стационарности и стационарной связности r-х разностей, будем считать

$$M\Delta_{\delta_2 t}(\varphi_{j,\nu}) = G(\delta_2 t) \qquad (12)$$

и $G(\delta_2\, t) = const$ при $\delta_2\, t = const$.

Здесь $(\varphi_{j,\nu}) = \begin{pmatrix} \varphi_{j,\nu}^{(1)} \\ \varphi_{j,\nu}^{(2)} \\ \vdots \\ \varphi_{j,\nu}^{(n)} \end{pmatrix}$ – реализация случайного n-мерного вектора, получаемая в результате замера n-параметров в ν-й момент времени;

$(\Delta_{\delta_2 t}^r \varphi_{j,\nu}) = (\Delta^{r-1}\varphi_{j,\nu+1}) - (\Delta^{r-1}\varphi_{j,\nu}) = \begin{pmatrix} \Delta^r\varphi_{j,\nu}^{(1)} \\ \Delta^r\varphi_{j,\nu}^{(2)} \\ \vdots \\ \Delta^r\varphi_{j,\nu}^{(n)} \end{pmatrix}$ – реализация случайного n-мерного вектора r-х разностей параметров, измеренных в ν-й и ($\nu + 1$)-й момент времени, и

$$G(\delta_2 t) = M \begin{pmatrix} \Delta^r\varphi_{j,\nu}^{(1)} \\ \Delta^r\varphi_{j,\nu}^{(2)} \\ \vdots \\ \Delta^r\varphi_{j,\nu}^{(n)} \end{pmatrix} = const, \quad \text{при} \quad \delta_2 t = const$$

Вследствие предположения о стационарности r-х разностей, математическое ожидание не зависит от момента времени и индекс ν можно убрать.

Обозначим $M\,\Delta^r\varphi_j^{(i)} = \mu_i$ – математическое ожидание r-й разности i-го параметра. Тогда ковариационная матрица случайного вектора $(\Delta^r\varphi_j)$ (в предположении, что процесс $\Delta^r\varphi$ отличен от винеровского) может быть записана

$$V = M\begin{pmatrix} (\Delta^r\varphi_j^{(1)}-\mu_1)^2 & (\Delta^r\varphi_j^{(1)}-\mu_1)(\Delta^r\varphi_j^{(2)}-\mu_2) & \cdots & (\Delta^r\varphi_j^{(1)}-\mu_1)(\Delta^r\varphi_j^{(n)}-\mu_n) \\ (\Delta^r\varphi_j^{(2)}-\mu_2)(\Delta^r\varphi_j^{(1)}-\mu_1) & (\Delta^r\varphi_j^{(2)}-\mu_2)^2 & \cdots & (\Delta^r\varphi_j^{(2)}-\mu_2)(\Delta^r\varphi_j^{(n)}-\mu_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (\Delta^r\varphi_j^{(n)}-\mu_n)(\Delta^r\varphi_j^{(1)}-\mu_1) & (\Delta^r\varphi_j^{(n)}-\mu_n)(\Delta^r\varphi_j^{(2)}-\mu_2) & \cdots & (\Delta^r\varphi_j^{(n)}-\mu_n)^2 \end{pmatrix}$$

Если обозначить

$$M(\Delta^r\varphi_j^{(i)}-\mu_i)^2 = \sigma_i^2 \tag{13}$$

и

$$\frac{M(\Delta^r\varphi_j^{(i)}-\mu_i)(\Delta^r\varphi_j^{(l)}-\mu_l)}{\sigma_i\sigma_l} = \rho_{il}\,, \tag{14}$$

то для стационарности и стационарной связности r-х разностей измеряемых параметров должны положить $\sigma_i^2 = const$ для каждого $i=\overline{1,n}$ и считать последовательности m-зависимыми и m_1-взаимозависимыми [6].

Последовательность $\{\Delta^r\varphi_{j,\nu}^{(i)}\},\ i=\overline{1,n},\ \nu=0,1,2,\ldots$ называется m-зависимой, если $\Delta^r\varphi_{j,\nu_1}^{(i)}$ и $\Delta^r\varphi_{j,\nu_2}^{(i)}$ для некоторого целого m независимы при $|\nu_2-\nu_1|\ge m$ и

$$\lim_{(\nu_2-\nu_1)\to m}\frac{M[(\Delta^r\varphi_{j,\nu_1}^{(i)}-\mu_i)(\Delta^r\varphi_{j,\nu_2}^{(i)}-\mu_i)]}{\sigma_i^2} = \rho_{i,i}\to 0\,. \tag{15}$$

Аналогично определим m_1-взаимозависимость

$$\lim_{(\nu_2-\nu_1)\to m_1}\frac{M[(\Delta^r\varphi_{j,\nu_2}^{(i)}-\mu_i)(\Delta^r\varphi_{j,\nu_1}^{(i)}-\mu_l)]}{\sigma_i\sigma_l} = \rho_{i,l}\to 0\,. \tag{16}$$

При машинной реализации алгоритмов восстановления информации необходимо непрерывно контролировать условия стационарности и стационарной связности. Наиболее простым алгоритмом контроля стационарности является алгоритм, основанный на неравенстве Чебышева, согласно которого вероятность того, что точка отклонится от своего математического ожидания больше чем на 3σ, меньше 1/9.

$$P(\Delta^r\varphi_{1,\nu}^{(i)}-\mu_i|\ge 3\sigma_i)\le\frac{\sigma_i^2}{9\sigma_i^2}=\frac{1}{9}\,.$$

При заданной вероятности можно выбрать число точек контроля. Например, оценку стационарности можно произвести по трем точкам. Вероятность того, что три точки подряд $P_{(3)}$ отклонятся от своего математического ожидания больше чем на 3σ $\quad P_{(3)} = P_1P_2P_3 = P_1^3 = \frac{1}{9^3} = \frac{1}{729}$ событие маловероятное. Противоположное событие – изменение математического ожидания $\left(P=\frac{728}{729}\approx 1\right)$ – событие почти достоверное, и процесс нестационарен относительно математического ожидания. Аналогичные алгоритмы будут для проверки стационарности относительно дисперсии и других моментов. Более строгие (и более сложные) алгоритмы контроля стационарности можно построить, используя неравенство Колмогорова [7] для мартингалов, а также неравенство Кантелли и неравенство Пика [4, 7], являющиеся неравенствами чебышевского типа.

Выводы

Подытоживая, можно сказать, что выборочное пространство *r*-х разностей измеряемых параметров метрически транзитивно (метрическая транзитивность и эргодичность в силу конечности вероятностной меры эквивалентны) [8]. Оно получено из исходного множества непрерывных нестационарных измеряемых параметров исследуемых динамических объектов введением операторов квантования по времени и уровню и разностного оператора Δ.

Список использованной литературы

1. Анго А. Математика для электро и радиоинженеров. – М.: Наука, 1964.
2. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.1, 2, 3. – М.: Гостехиздат, 1949.
3. Карташов Г.Д. О нахождении функциональной зависимости между случайными величинами. – М-Л.: Теория вероятностей и ее применение. Т.Х, вып. 3, 1965.
4. Хеннан Э. Анализ временных рядов. – М.: Наука, 1964.
5. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей. – М-Л.: Гостехиздат, 1952.
6. Яглом А.М. Корреляционная теория процессов со стационарными *n*-ми приращениями. – М.: Математический сборник, Т.37, №1,1955.
7. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1, 2. – М.: Мир, 1967.
8. Лоэв М. Теория вероятностей. – М.: ИЛ, 1962.