УДК 519.816

Н.К. ТИМОФІЄВА
Міжнародний науково-навчальний центр
інформаційних технологій та систем НАН та МОН України

МОДЕЛЮВАННЯ ПРЯМИХ ТА ОБЕРНЕНИХ ЦІЛЬОВИХ ФУНКЦІЙ В КОМБІНАТОРНІЙ ОПТИМІЗАЦІЇ

Показано, що прямі та обернені цільові функції в комбінаторній оптимізації моделюються різними виразами, значення яких для певного впорядкування комбінаторних конфігурацій (аргументу) змінюється симетрично. Це пояснюється тим, що множині комбінаторних конфігурацій властива симетрія. Якщо цільова функція моделюється одним виразом, то для оберненої задачі по відношенню до основної на неї накладаються певні обмеження.

Ключові слова: комбінаторна оптимізація, прямі та обернені функції, комбінаторна конфігурація, функція натурального аргументу, цільова функція.

Н.К. ТИМОФЕЕВА
Международный научно-учебный центр
информационных технологий и систем НАН и МОН Украины

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРЯМЫХ И ОБРАТНЫХ ЦЕЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ В КОМБИНАТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Показано, что прямые и обратные целевые функции в комбинаторной оптимизации моделируются разными выражениями, значения которых для конкретного упорядочения комбинаторных конфигураций (аргумента) изменяется симметрично. Это объясняется тем, что множеству комбинаторных конфигураций характерна симметрия. Если целевая функция моделируется одним выражением, то для нахождения ее оптимальных значений накладываются конкретные ограничения.

Ключевые слова: комбинаторная оптимизация, прямые и обратные функции, комбинаторная конфигурация, функция натурального аргумента, целевая функция.

N.K. TIMOFEEVA
International Scientific Training Cente for Information Technologses and Systems

MODELLING OF THE DIRECT AND INVERSE OBJECTIVE FUNCTIONS IN COMBINATORIAL OPTIMIZATION

It is shown that the direct and inverse objective functions in combinatorial optimization are modeled different expressions whose values for a particular ordering of combinatorial configurations (argument) is changed symmetrically. This is because that the set of combinatorial configuration characteristic of symmetry. If the objective function is modeled by one expression, then to find its optimal values imposed certain limitations.

Keywords: the combinatorial optimization, the direct and inverse functions, the combinatorial configuration, the functions of natural argument, the objective function.

Постановка задачі

В комбінаторній оптимізації оцінку оптимального розв'язку задачі можна проводити як за максимальним значенням цільової функції, так і за мінімальним. Тобто, якщо накласти одні умови на обчислення змодельованої цільової функції, то для заданого аргументу вона набуває найбільшого значення. За інших умов для цього ж самого аргументу цільова функція набуває найменшого значення. Така властивість задач комбінаторної оптимізації характерна для прямих та обернених функцій [1]. Для задач, що розв’язуються на перестановках, прямі та обернені цільові функції моделюються різними виразами. Вивчення цих функцій дасть можливість досліджувати залежність зміни значень цільової функції від структури вхідної інформації та використовувати для розв’язання оговорених задач ефективні підходи, які дозволять поліноміально знаходити глобальний або наближений до нього результат.

Аналіз останніх досліджень та публікацій за темою

Для розв’язання задач комбінаторної оптимізації використовують методи, які ґрунтуються на частковому переборі варіантів, наприклад [2–4]. Оптимальне значення в цьому разі оцінюють за допомогою лінійної функції, яка має властивості кореляційних. Тобто, в цих методах не розпізнається, не аналізується та не встановлюється закономірність зміни значень цільової функції від структури вхідних даних. Тому в літературі з комбінаторної оптимізації не розглядаються прямі та обернені функції як цільові, так і ті, якими моделюються вхідні дані. В комбінаторній оптимізації ця властивість проявляється завдяки симетрії комбінаторних множин, які є аргументом цільової функції. Аналогічну властивість в задачах оптимізації визначають як двоїстість [5–6].

Формулювання мети дослідження

Нижче проведено аналіз зміни значень прямої та оберненої цільових функції для задач комбінаторної оптимізації, що розв'язуються на перестановках та на розбитті n-елементної множини на підмножини. Показано, що для задач, які розв'язуються на перестановках, цільова функція моделюється різними виразами: прямою та оберненою. На заданому впорядкуванні комбінаторних конфігурацій вони змінюються симетрично.

Моделювання структури вхідних даних функціями натурального аргументу

Наведемо загальну постановку задачі комбінаторної оптимізації [7]. Задачі цього класу, як правило, задаються однією або кількома множинами, наприклад A та B, елементи яких мають будь-яку природу. Назвемо ці множини *базовими*. Наявні два типи задач. В *першому* типі кожну з цих множин подамо у вигляді графа, вершинами якого є її елементи, а кожному ребру поставлено у відповідність число $c_{ls} \in R$, яке називають вагою ребра (R – множина дійсних чисел); $l \in \{1,...,n\}$, $s \in \{1,..., \tilde{n}\}$, n – кількість елементів множини A, $\tilde{n}$ – кількість елементів множини B. Покладемо, що $n = \tilde{n}$. Між елементами цих множин існують зв'язки, числове значення яких назвемо вагами. Величини c_{ls} назвемо *вхідними* даними та задамо їх матрицями. В *другому* типі задач між елементами заданої множини зв'язків не існує, а вагами є числа $v_j \in R$, $j \in \{1,...,n\}$, яким у відповідність поставлено деякі властивості цих елементів, числові значення яких задаються скінченними послідовностями, що також є вхідними даними. Ці величини визначають значення цільової функції.

Для обох типів задач із елементів однієї або кількох із заданих множин, наприклад $a_l \in A$, $l \in \{1,..., n\}$, утворюється комбінаторна множина W – сукупність комбінаторних конфігурацій певного типу (перестановки, вибірки різних типів, розбиття тощо). На елементах w комбінаторної множини W вводиться цільова функція $F(w)$. Необхідно знайти елемент w^* множини W, для якого $F(w)$ набуває екстремального значення при виконанні заданих обмежень.

Змоделюємо вхідні дані в задачі комбінаторної оптимізації першого типу скінченними послідовностями. Подамо елементи h наддіагоналей симетричної комбінаторної матриці $Q(w^k)$ комбінаторною функцією $\beta(f(j), w^k)|_1^m = (\beta_1(f(1), w^k),..., \beta_m(f(m), w^k))$, а елементи h наддіагоналей симетричної матриці C – функцією натурального аргументу $\varphi(j)|_1^m = (\varphi(1), ..., \varphi(m))$, де $m = \frac{n(n-1)}{2}$ – кількість елементів h наддіагоналей матриць C та $Q(w^k)$, $h = \overline{1, n-1}$. Верхній індекс k ($k \in \{1,..., q\}$) – порядковий номер w^k в W, q – їхня кількість. Якщо матриці $Q(w^i)$ та C – несиметричні, то $\beta(f(j), w^k)|_1^m$ та $\varphi(j)|_1^m$ містять усі їхні елементи, а m=n^2 (або $m = n\tilde{n}$). Функція цілі $F(w^k)$ набуває вигляду

$$F(w^k) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j (f(j), w^k) \varphi(j) . \tag{1}$$

Уведемо системи комбінаторних функцій H та H', де $\beta(f(j), w^k)|_1^m \in H$ – комбінаторна функція, аргументом якої є перестановка $w^k \in W$, утворена з елементів базової множини $A_n = \{a_1 ,..., a_n\}$, $\beta(f(j), w'^i)|_1^m \in H'$ – комбінаторна функція, аргументом якої є перестановка $w'^i \in W'$, утворена з елементів базової множини $\tilde{A}_m = \{\tilde{a}_1 ,..., \tilde{a}_m\}$. Якщо $\beta(f(j), w^1)|_1^m = \beta(f(j), w'^1)|_1^m$, де w^1, w'^1 – перші перестановки в W, W' і $\beta(f(j), w^1)|_1^m \in H$, $\beta(f(j), w'^1)|_1^m \in H'$, то $H \subset H'$. Задачу комбінаторної оптимізації, вхідні дані в якій задано функціями $\beta(f(j), w^k)|_1^m$ та $\varphi(j)|_1^m$, назвемо базовою (або задачею системи H). Задачу, вхідні дані в якій задано функціями $\overleftarrow{\beta}(f(j), w^{'i})|_1^m$ (або $\vec{\beta}(f(j), w^{'t})|_1^m$), де $\overleftarrow{\beta}(f(j), w^{'i}) \geq \overleftarrow{\beta}(f(j+1), w^{'i})$ (або $\vec{\beta}(f(j), w^{'t}) \leq \vec{\beta}(f(j+1), w^{'t})$), та $\vec{\varphi}(j)|_1^m$ (або $\overleftarrow{\varphi}(j)|_1^m$), де $\vec{\varphi}(j) \leq \vec{\varphi}(j+1)$ (або $\overleftarrow{\varphi}(j) \geq \overleftarrow{\varphi}(j+1)$), утворених із $\beta(f(j), w^k)|_1^m$ та $\varphi(j)|_1^m$, назвемо впорядкованою (або задачею системи $H^{'}$).

Сформулюємо таке означення.

Означення. Назвемо прямою та оберненою функції, які симетричні відносно лінії, паралельній осі абсцис або осі ординат. Якщо ці функції монотонні, то паралельна лінія проходить через точку їх нього перетину.

Пряма та обернена функції мають однакові множини визначення та множини значень.

Задачі комбінаторної оптимізації, аргументом цільової функції в яких є розбиття n-елементної множини на підмножини

Поняття "задачі розбиття" об'єднує широкий клас задач (як дискретних так і неперервних), аргументом цільової функції в яких є розбиття n-елементної множини на підмножини. Це – компоновка, кластеризація, класифікація, самонавчання, покриття, розбиття геометричної поверхні, розрізання графів тощо. Цільова функція в них формулюється по-різному, підходи до їхнього розв'язання також – різні. Розглянемо розбиття на неперетинні класи. Розбиттям n-елементної множини $A = \{a_1, ..., a_n\}$ на η підмножин (блоків) назвемо множину підмножин $w^k = (w_1^k, ..., w_{\eta^k}^k)$ таку, що $w_1^k \cup ... \cup w_{\eta^k}^k = A$, $w_r^k \neq \varnothing$, $w_p^k \cap w_r^k = \varnothing$, $p \neq r$, $p, r \in \{1, ..., \eta^k\}$, $\eta^k \in \{1, ..., n\}$ – кількість підмножин в w^k. Підмножина $w_r^k = (a_1, ..., a_{\xi_r^k})$, $a_\tau \in A$, $\tau \in \{1, ..., n\}$, може мати від 1 до n елементів ($\xi_r^k \in \{1, ..., n\}$). Два розбиття w^k та w^i назвемо ізоморфними, якщо $\eta^k = \eta^i$ і для будь-якої підмножини $w_p^k \subset w^k$ знайдеться підмножина $w_r^i \subset w^i$, для якої $\xi_p^k = \xi_r^i$.

Задачу, аргументом цільової функції в якій є розбиття n-елементної множини на підмножини, назвемо основною, а цільову функцію (1) прямою, якщо в ній знаходження оптимального результату проводиться за кількістю зв'язків між елементами однієї і тієї ж підмножини. Задачу із класу розбиття назвемо оберненою до основної, в якій цільова функція $F^{-1}(w^k)$ обернена до прямої (1), тобто результат обчислюється за кількістю зв'язків між елементами, що знаходяться в різних підмножинах. В цьому разі $\beta_j(f(j), w^k) = 1$, якщо елементи $a_s\, a_l \in A$ знаходяться в різних підмножинах заданого розбиття, та $\beta_j(f(j), w^k) = 0$ в іншому випадку. Якщо цільова функція (1) в основній задачі набуває найбільшого значення, то в оберненій набуває найменшого значення і навпаки.

Задачі комбінаторної оптимізації, аргументом цільової функції в яких є перестановка

Зміну значень цільової функції в задачах, аргументом якої є перестановка, розглянемо для впорядкованої задачі (система $H^{'}$). Для них прямою цільовою функцією, вважаємо вираз

$$F(w^{'t}) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j (f(j), w^{'t})\, \varphi(j), \tag{2}$$

а оберненою

$$F^{-1}(w^{'t}) = \prod_{j=1}^{m} (\beta(f(j), w^{'t}) + \varphi(j)) \text{ для } (\beta(f(j), w^{'t}) + \varphi(j)) > 0,\ j = \overline{1,n}. \tag{3}$$

Теорема 1. Якщо $\beta(\ f\ (j), w^{'1})|^m_1 = (1,..., m)$, а $\varphi(\ j\ )\ |^m_1 = (1, ..., m)$, то найбільшого значення цільова функція (2) набуває для перестановки $w^{'1} = (1,..., m)$, а найменшого – для перестановки $\tilde{w}^{'t} = (\ m, ..., 1)$.

Лема 1. Значення цільової функції, яка задана виразом $\tilde{F}(w^{'t}) = \prod_{j=1}^{m} \beta_j\ (f\ (j), w^{'t})\ \varphi(j)$, $\beta\ (f\ (j), w^{'t})\ \varphi(j) > 0$ для усіх $t = \{1,..., m!\}$ перестановок $w^{'t}$ дорівнює постійній величині. Для $\beta(\ f\ (j), w^{'1})|^m_1 = (1,..., m)$, $\varphi(\ j\ )\ |^m_1 = (1, ..., m)$ $\tilde{F}(w^{'t}) = \prod_{j=1}^{m} j^2 = (m\,!)^2$.

Доведення очевидне.

Теорема 2. Якщо $\beta(\ f\ (j), w^{1})|^m_1 = (1,..., m)$, $\varphi(\ j\ )\ |^m_1 = (1, ..., m)$, то найбільшого значення цільова функція (3) набуває для перестановки $\tilde{w}^{'t} = (\ m, ..., 1)$, а найменшого – для перестановки $w^{'1} = (1,..., m)$ і $\prod_{j=1}^{m}(m+1) > \prod_{j=1}^{m} 2\ j$, де $F^{-1}(\tilde{w}^{'t}) = \prod_{j=1}^{m}(m+1)$, а $F^{-1}(w^{'1}) = \prod_{j=1}^{m} 2\ j$.

Доведення. Доведемо такі леми.

Лема 2. Значення цільової функції (3) для $w^{'1}$, якщо $\beta(\ f\ (j), w^{'1})|^m_1 = (1,..., m)$, а $\varphi(\ j\ )\ |^m_1 = (1, ..., m)$, менше ніж для $\tilde{w}^{'t}$, якщо $\beta(\ f\ (j), \tilde{w}^{'t})|^m_1 = (m,..., 1)$, а $\varphi(\ j\ )\ |^m_1 = (1, ..., m)$.

Доведення. Значення цільової функції (3), якщо $\beta(\ f\ (j), w^{'1})|^m_1 = (1,..., m)$, а $\varphi(\ j\ )\ |^m_1 = (1, ..., m)$, дорівнює $F(w^{'1}) = \prod_{j=1}^{m}(\beta_j\ (f\ (j),\ w^{'1})\ +\ \varphi(j)\ ) = (1+1)\,(2+2)(3+3...(m+m) =$ $= \prod_{j=1}^{m} 2j = 2^m m\,!\cdot$. Значення цільової функції (3), якщо $\beta(\ f\ (j), \tilde{w}^{'t})|^m_1 = (m,..., 1)$, а $\varphi(\ j\ )\ |^m_1 =$ $= (1, ..., m)$, дорівнює $F(\tilde{w}^{'t}) = \prod_{j=1}^{m}(\beta_j\ (f\ (j),\ \tilde{w}^{'t}) + \varphi(j)\ ) = (1+m)\,(2+m-1)\,(3+m-2)...$

$$.... (m-1+2)(m+1) = (1+m)(1+m)(1+m)...(m+1)(m+1) = \prod_{j=1}^{m}(m+1) = (m+1)^m\ .$$

Доведемо нерівність

$$2^m m\,! < (m+1)^m\ . \tag{4}$$

Обчислимо значення $2^m m\,!$ і результати занесемо в таблицю.

Таблиця 1

Значення $2^m m\,!$

m	$m\,!$	2^m	$2^m m\,!$
1	1	2	$2 = m+1$
2	2	4	$8 = 2\,(m+1)+2$
3	6	8	$48 = 3\,(m+1)^2$
4	24	16	$384 = 3\,(m+1)^3 + 9$
5	120	32	$3840 = 3\,(m+1)^4 - 48$
6	720	64	$46080 = 3\,(m+1)^5 - 1341$
7	5040	128	$645120 = 3\,(m+1)^6 - 141312$

Використовуючи результати цих обчислень, запишемо $2^m m!$ як $2^m m! = 3(m+1)^{m-1} - K$, де $K > 0$ – довільне ціле число. Тоді нерівність (4) набуде вигляду: $3(m+1)^{m-1} - K < (m+1)^m$. В результаті одержимо: $3 - K/(m+1)^{m-1} < m+1$, що і доводить нерівність (4), а тим самим і лему 2.

Зауваження. Для $m = 1$ $(m+1)^1 = 2$ і $2^m m! = 2$.

Лема 3. Заміна в послідовності $(1, 1, 2, 2, ..., a, a, ..., b, b, ..., m, m)$ чисел (a, a) на (a, b), а (b, b) на (a, b), призводить до збільшення добутку членів одержаної послідовності, тобто $(1+1)(2+2)\cdot ...\cdot 2a \cdot ...\cdot 2b \cdot ...\cdot 2m < (1+1)(2+2)\cdot ...\cdot (a+b)\cdot ...\cdot (a+b)\cdot ...\cdot 2m$.

Доведення. Оскільки $(a-b)^2 > 0$, то $4ab < (a+b)^2$, що і доводить лему 3.

Лема 4. Заміна будь-яких чисел a, b, $a \neq b$, у функції $\beta(f(j), \tilde{w}'^t)|_1^m$ на будь-які інші значення $\beta_j(f(j), \tilde{w}'^t)$ не збільшує добутку нової послідовності.

Доведення. Запишемо нерівність $(1+m)(2+(m-1))\cdot ...\cdot (a+(m-(a-1)))((a+1)+(m- \cdot -((a+1)-1))) \geq (1+m)(2+(m-1))\cdot ...\cdot (a+(a+1))(m-(a-1)+m-((a+1)-1))...(m+1)$, $a \in \{1, ..., m\}$.

Доведемо, що

$$(a+(m-(a-1)))((a+1)+(m-((a+1)-1))) \geq \geq (a+(a+1))(m-(a-1)+m-((a+1)-1) \quad (5)$$

Шляхом нескладних перетворень нерівності (5), одержимо $(m+1)^2 \geq (2a+1)(2m-2a+1)$ і в результаті $m^2 \geq 2am - 2a^2$.

З виразу $(m-a)^2 + a^2 > 0$ випливає справедливість нерівності (5), а тим самим і леми 4.

Справедливість теореми 2 випливає з лем 2–4.

Теорему 2 доведено.

Оскільки $H \subset H'$ при $\beta(f(j), w^1)|_1^m = \beta(f(j), w'^1)|_1^m$, то викладені результати справедливі і для базової задачі (системи H).

Висновок

Отже, якщо аргументом цільової функції є перестановка, то обернена задача до основної (2) задається виразом (3) за умови, що $\beta_j(f(j), w^k) + \varphi(j) > 0$ для всіх $j = \overline{1, n}$. Для аргументу w^k, для якого цільова функція (2) набуває найменшого значення, вираз (3) набуває найбільшого значення і навпаки. В задачах розбиття цільова функція задається одним виразом. Тому, як для основної так і для оберненої задач уводяться певні обмеження.

Аналізуючи зміну значень цільової функції в задачах комбінаторної оптимізації в залежності від упорядкування її аргументу можна побачити, що тут має місце симетрія. Ця властивість характерна для утворення та впорядкування комбінаторних множин (аргументу цільової функції).

Список використаної літератури

1. Тимофеева Н.К. Оптимизация функции цели на отрезке натурального ряда / Н.К. Тимофеева / Ин-т кибернетики им.В.М.Глушкова НАН УССР. – К., 1989. – 24 с. Деп. в ВИНИТИ 12.12.89, № 7344–В 89. – Реф. в: Математика. – 1990. – № 4.
2. Пападимитриу Х. Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность: Пер. с англ. / Х.Пападимитриу, К. Стайглиц. – М.: Мир, 1985. – 510 с.
3. Сергиенко И.В. Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации / И.В. Сергиенко, М. Ф. Каспшицкая. – К. : Наук. думка, 1981. – 281 с.
4. Сергиенко И.В. Задачи дискретной оптимизации. Проблемы, методы решения, исследования / И.В. Сергиенко, В.П. Шило. – К.: Наук. думка, 2003. – 261 с.
5. Карманов В.Г. Математическое программирование / В.Г. Карманов.– М.: Наука, 1986. – 286 с.
6. Еремин И.И. Двойственность в линейной отимизации / И.И. Еремин. – Екатеринбург: Ин-т матем. и механики УрО РАН, 2001. – 180 с.
7. Тимофієва Н.К. Теоретико-числові методи розв'язання задач комбінаторної оптимізації : автореф. дис. … д-ра техн. наук / Тимофієва Надія Костянтинівна; Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України. – К., 2007. – 32 с.