ПРИКЛАДНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И КОМПЬЮТЕРНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

УДК 514.18

Н.М. АУШЕВА, А.Г. ГУРІН
Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут”

МОДЕЛЮВАННЯ ПЛОСКИХ СІТОК НА ОСНОВІ ІЗОТРОПНИХ B-СПЛАЙНІВ

У роботі пропонується модифікація періодичного B-сплайну з нормалізованою параметризацією для формування кривих з нульовою довжиною. Точки характеристичного многокутника визначаються у комплексному вигляді. Визначено умови для формування ізотропних кривих. Побудова сітки здійснюється на основі заміни параметра ізотропної кривої на комплексну змінну. Доведено, що сітка буде ортогональною та ізотермічною.

Ключові слова: плоскі сітки, ізотропна крива, періодичний B-сплайн, нормалізована параметризація, крива третього порядку.

Н.Н. АУШЕВА, А.Л. ГУРИН
Национальний технический университет Украины “Киевский политехнический институт”

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЛОСКИХ СЕТОК НА ОСНОВЕ ИЗОТРОПНЫХ B-СПЛАЙНОВ

В работе предлагается модификация периодического B-сплайна с нормализованной параметризацией для формирования кривых с нулевой длиной. Точки характеристического многоугольника определяются в комплексном виде. Определены условия для формирования изотропных кривых. Построение сетки осуществляется на основе замены параметра изотропной кривой на комплексную переменную. Доказано, что сетка будет ортогональной и изотермической.

Ключевые слова: плоские сетки, изотропная кривая, периодический B-сплайн, нормализованная параметризация, кривая третьего порядка.

N.M. AUSHEVA, A.L. GURIN
National Technical University of Ukraine “Kyiv Polytechnic Institute”

MODELING OF PLANE GRIDS BASED ON ISOTROPIC B-SPLINES

Modification of a periodic B-spline having normalized parameterization is proposed in the paper for the purpose of forming zero length curves. Appropriate points of the characteristic polygon are determined as complex-valued ones. Conditions for the formation of isotropic curves have been determined. Building of the grid is realized by way of substitution of an isotropic curve parameter with a complex-valued variable. It has been proved that the grid is to be orthogonal and isothermal.

Keywords: plane grids, isotropic curve, periodic B-spline, normalized parameterization, cubic curve.

Постановка проблеми

При конструюванні поверхонь виникає проблема віднесення поверхонь до конкретних типів координатних сіток, які володіють специфічними властивостями. Ці властивості надають нові можливості у процесі спрощування виразів для першої та другої квадратичних форм. З цієї точки зору дуже перспективним є виявлення основних закономірностей впливу ізотропних характеристик на побудову координатних плоских сіток. Дослідження проводились стосовно моделювання ізотропних кривих у вигляді Без’є [1] та дробово-раціональних кривих [2]. Доцільно провести дослідження стосовно моделювання ізотропних кривих у вигляді B-сплайнів.

Аналіз останніх досліджень

У роботі [2] досліджується побудова плоских сіток на основі дробово-раціональних кривих нульової довжини. Знайдені умови для формування плоскої ізотропної кривої та ізотропної сітки на площині. Дослідження просторових ізотропних сіток у комплексному просторі описано в роботі [3]. Дисертаційні дослідження [4] присвячено конструюванню і перетворенню поверхонь із збереженням ортогональних сіток координатних ліній та ліній кривини. Автором робіт [5-7] пропонується використовувати ізотропні криві для моделювання мінімальних поверхонь. Ізотропні криві моделюються у формі Без’є. Досліджуються властивості характеристичних многокутників.

Формулювання цілей статті (постановка завдання)

Побудова плоскої сітки на основі напрямної, що задається сегментом ізотропної кривої періодичного *B*-сплайну з нормалізованою параметризацією.

Основна частина

Нехай задана певна ізотропна плоска крива $\mathbf{r}(t)$. Моделювання будь-яких ізотропних кривих будемо проводити за допомогою завдання дійсних характеристик точок та визначення уявних: $\mathbf{r}_{j\,\mathrm{Re}} \Rightarrow \mathbf{r}_{j\,\mathrm{Im}}$. Для побудови сітки використаємо ізотропну криву як напрямну криву. Для цього підставимо замість параметра *t* певну комплексну змінну $u+iv$: $t=u+iv$.

Оберемо в якості ізотропної кривої періодичний *B*-сплайн з нормалізованою параметризацією.

Відомо, що періодичний *B*-сплайн з нормалізованою параметризацією являє собою сукупність сегментів, базисні функції яких приведені до інтервалу параметра $(0 \le t \le 1)$ та є однаковими.

$$\mathbf{r}_j(t) = \frac{1}{6}\cdot\left[t^3, t^2, t, 1\right]\cdot\begin{bmatrix}-1 & 3 & -3 & 1\\ 3 & -6 & 3 & 0\\ -3 & 0 & 3 & 0\\ 1 & 4 & 1 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}r_j\\ r_{j+1}\\ r_{j+2}\\ r_{j+3}\end{bmatrix},\ (0 \le t \le 1) \qquad (1)$$

де j – кількість сегментів кривої *B*-сплайну,

r_j, r_{j+1}, r_{J+2}, r_{j+3} – реперні точки характеристичного чотирикутника.

Типовий сегмент кривої періодичного *B*-сплайну четвертого порядку з нормалізованою параметризацією має вигляд:

$$\mathrm{r}_j(t) = \frac{1}{6}(\mathrm{r}_j(-t^3+3t^2-3t+1) \ + \mathrm{r}_{j+1}(3t^3-6t^2+4) + \mathrm{r}_{j+2}(-3t^3+3t^2+3t+1) + \mathrm{r}_{j+3}t^3)\,. \qquad (2)$$

Будемо задавати координати точок характеристичного чотирикутника у комплексному вигляді:

$$\mathbf{r_{j+1}} = \left[\mathrm{Re}(x_{j+1}) \pm i\,\mathrm{Im}(x_{j+1}) \quad \mathrm{Re}(y_{j+1}) \pm i\,\mathrm{Im}(y_{j+1})\right], \qquad j = 0..3. \qquad (3)$$

Для побудови періодичного *B*-сплайну відокремлюється дійсна частини [6]. При такому підході на формування кривої не впливає уявна складова комплексних складових. Визначимо умови ізотропності для обраного *B*-сплайну.

Розглянемо моделювання просторової ізотропної модифікованої кривої періодичного *B*-сплайну четвертого порядку на основі рівняння (3).

Для цього візьмемо квадрат виразу (3) та підставимо в умову ізотропності кривих [6]. Будемо мати:

$$\sum_{r=x,y,z}\left[\frac{1}{4}\left(r_j{}^2 + 9r_{j+1}{}^2 + 9r_{j+2}{}^2 + r_{j+3}{}^2\right)\cdot t^4 + \left(r_j{}^2 + 4r_{j+1}{}^2 + r_{j+2}{}^2\right)\cdot t^2 + (r_j{}^2 + r_{J+2}{}^2)\right] = 0. \qquad (4)$$

Умова (4) буде виконуватись та не залежати від значення параметра, якщо коефіцієнти при всіх степенях t дорівнюють 0. Тобто одержимо рівняння:

$$\begin{cases}\sum\limits_{r=x,y,z}\left(r_j{}^2 + 9r_{j+1}{}^2 + 9r_{j+2}{}^2 + r_{j+3}{}^2\right) = 0,\\ \sum\limits_{r=x,y,z}(r_j{}^2 + 4r_{j+1}{}^2 + r_{j+2}{}^2) = 0,\\ \sum\limits_{r=x,y,z}(r_j{}^2 + r_{j+2}{}^2) = 0.\end{cases} \qquad (5)$$

Вираз (5) визначає умови ізотропності просторового модифікованого сегмента кривої періодичного нормалізованого *B*-сплайну четвертого порядку (2).

Розглянемо моделювання плоского ізотропного модифікованого сегмента кривої періодичного нормалізованого *B*-сплайну четвертого порядку. З урахуванням виразів (5) ординати реперних точок будуть визначатися наступним чином:

$$\begin{aligned} y_{j+1} &= \frac{1}{2}(y_j + y_{j+2} + ix_j - 2ix_{j+1} + ix_{j+2}),\\ y_{j+2} &= y_j + ix_j - ix_{j+2},\\ y_{j+3} &= y_j - 3y_{j+1} + 3y_{j+2} + ix_j - 3ix_{j+1} + 3ix_{j+2} - ix_{j+3}.\end{aligned} \qquad (6)$$

або після спрощення:

$$\begin{aligned} y_{j+1} &= y_j + i(x_j - x_{j+1}),\\ y_{j+2} &= y_j + i(x_j - x_{j+2}),\\ y_{j+3} &= y_j + i(x_j - x_{j+3}).\end{aligned} \qquad (7)$$

Виділимо окремо дійсну $\mathrm{Re}(y_j)$ та уявну $\mathrm{Im}(y_j)$ частини та будемо задавати на площині плоску дійсну криву. У цьому випадку кількість умов збільшиться в два рази. Для визначення всіх координат необхідно додати ще дві умови, а саме уявні частини вектору r_j. В результаті одержимо:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Im}(x_{j+1}) = -\mathrm{Re}(y_j) + \mathrm{Re}(y_{j+1}) + \mathrm{Im}(x_j),\\
&\mathrm{Im}(y_{j+1}) = \mathrm{Re}(x_j) - \mathrm{Re}(x_{j+1}) + \mathrm{Im}(y_j),\\
&\mathrm{Im}(x_{j+2}) = -\mathrm{Re}(y_j) + \mathrm{Re}(y_{j+2}) + \mathrm{Im}(x_j),\\
&\mathrm{Im}(y_{j+2}) = \mathrm{Re}(x_j) - \mathrm{Re}(x_{j+2}) + \mathrm{Im}(y_j),\\
&\mathrm{Im}(x_{j+3}) = -\mathrm{Re}(y_j) + \mathrm{Re}(y_{j+3}) + \mathrm{Im}(x_j),\\
&\mathrm{Im}(y_{j+3}) = \mathrm{Re}(x_j) - \mathrm{Re}(x_{j+3}) + \mathrm{Im}(y_j).
\end{aligned} \tag{8}$$

Побудуємо плоску сітку на основі ізотропного періодичного нормалізованого *B*-сплайну четвертого порядку з конформною заміною параметра. Для цього підставимо в рівняння (2) вирази (7) та $t = u + iv$:

$$\begin{aligned}
&x_j(u+iv) = \frac{1}{6}(x_j(-(u+iv)^3 + 3(u+iv)^2 - 3(u+iv) + 1) + x_{j+1}(3(u+iv)^3 - 6(u+iv)^2 + 4) +\\
&x_{j+2}(-3(u+iv)^3 + 3(u+iv)^2 + 3(u+iv) + 1) + x_{j+3}(u+iv)^3),\\
&y_j(u+iv) = \frac{1}{6}(y_j(-(u+iv)^3 + 3(u+iv)^2 - 3(u+iv) + 1) + (y_j + ix_j - ix_{j+1})(3(u+iv)^3 -\\
&6(u+iv)^2 + 4) + (y_j + ix_j - ix_{j+2})(-3(u+iv)^3 + 3(u+iv)^2 + 3(u+iv) + 1) +\\
&(y_j + ix_j - ix_{j+3})(u+iv)^3,
\end{aligned} \tag{9}$$

Відокремимо дійсну частину від одержаної функції (9). Визначимо внутрішню геометрію побудованої сітки. Для цього розрахуємо коефіцієнти першої квадратичної форми, які дадуть змогу оцінити довжини сегментів кривих, кути між кривими та площі областей на сітці. Для цього візьмемо частинні похідні від $\mathrm{Re}(x(u+iv))$, $\mathrm{Re}(y(u+iv))$.

Порівняємо одержані похідні:

$$\begin{aligned}
&x_{vj}(u,v) = y_{uj}(u,v), \quad x_{v(j+1)}(u,v) = y_{u(j+1)}(u,v), \quad x_{v(j+2)}(u,v) = y_{u(j+2)}(u,v),\\
&x_{uj}(u,v) = -y_{vj}(u,v), \quad x_{u(j+1)}(u,v) = -y_{v(j+1)}(u,v), \quad x_{u(j+2)}(u,v) = -y_{v(j+2)}(u,v).
\end{aligned} \tag{10}$$

Одержані рівняння підставимо у вирази для першої квадратичної форми:

$$\begin{aligned}
&F_j = x_{uj}(u,v)x_{vj}(u,v) + y_{uj}(u,v)y_{vj}(u,v) = x_{uj}(u,v)y_{uj}(u,v) - y_{uj}(u,v)x_{uj}(u,v) = 0,\\
&E_j = x_{uj}(u,v)^2 + y_{uj}(u,v)^2 = y_{vj}(u,v)^2 + y_{uj}(u,v)^2,\\
&G_j = x_{vj}(u,v)^2 + y_{vj}(u,v)^2 = y_{uj}(u,v)^2 + y_{vj}(u,v)^2.
\end{aligned} \tag{11}$$

З рівняння (10) видно, що $E_j = G_j$, а $F_j = 0$.

Значення $F_j = 0$ означає, що побудована сітка є ортогональною, а $E_j = G_j$ – ізотермічною.

Приклад. Побудуємо ортогональну та ізотермічну плоску сітку. Для побудови сітки використаємо ізотропну криву сегменту періодичного нормалізованого *B*-сплайну четвертого порядку. *B*-сплайн задається вершинами $B_0, B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, B_7$, де перші і останні три вершини – кратні, та складається з п'яти сегментів. Задано такі значення вершин:

$$\mathrm{Re}(x_0) = \mathrm{Re}(x_1) = \mathrm{Re}(x_2) = 1.0,\ \mathrm{Re}(x_3) = 4.0,\ \mathrm{Re}(x_4) = 3.0,\ \mathrm{Re}(x_5) = \mathrm{Re}(x_6) = \mathrm{Re}(x_7) = 6.0,$$

$$\mathrm{Re}(y_0) = \mathrm{Re}(y_1) = \mathrm{Re}(y_2) = 1.0,\ \mathrm{Re}(y_3) = 2.0,\ \mathrm{Re}(y_4) = 4.0,\ \mathrm{Re}(y_5) = \mathrm{Re}(y_6) = \mathrm{Re}(y_7) = 5.0,$$

$$\mathrm{Im}(x_0) = 2.0,\ \mathrm{Im}(y_0) = 2.0.$$

Розрахуємо значення уявних частин на основі виразу (7):

$$\mathrm{Im}(x_0) = \mathrm{Im}(x_1) = \mathrm{Im}(x_2) = 2.0,\ \mathrm{Im}(x_3) = 3.0,\ \mathrm{Im}(x_4) = 5.0,\ \mathrm{Im}(x_5) = \mathrm{Im}(x_6) = \mathrm{Im}(x_7) = 6.0,$$

$$\mathrm{Im}(y_0) = \mathrm{Im}(y_1) = \mathrm{Im}(y_2) = 2.0,\ \mathrm{Im}(y_3) = -1.0,\ \mathrm{Im}(y_4) = 0,\ \mathrm{Im}(y_5) = \mathrm{Im}(y_6) = \mathrm{Im}(y_7) = -3.0.$$

Сегменти кривої ізотропного модифікованого *B*-сплайну мають наступний вигляд:

$$\begin{cases} x_0(t) = 0.5t^3 + 1.0 \\ y_0(t) = 0.166666t^3 + 1.0 \end{cases} \quad \text{при } j = 0,$$

$$\begin{cases} x_1(t) = -1.166667t^3 + 1.5t^2 + 1.5t + 1.5 \\ y_1(t) = 0.5t^2 + 0.5t + 1.1666667 \end{cases} \quad \text{при } j = 1,$$

$$\begin{cases} x_2(t) = 1.33333t^3 - 2.0t^2 + t + 3.333337 \\ y_2(t) = -0.33333t^3 + 0.5t^2 + 1.5t + 2.166667 \end{cases} \quad \text{при } j = 2, \tag{12}$$

$$\begin{cases} x_3(t) = -1.166667t^3 + 2t^2 + t + 3.666667 \\ y_3(t) = -0.5t^2 + 1.5t + 3.833333 \end{cases} \quad \text{при } j = 3,$$

$$\begin{cases} x_4(t) = 0.5t^3 - 1.5t^2 + 1.5t + 5.5 \\ y_4(t) = 0.166667t^3 - 0.5t^2 + 0.5t + 4.833333 \end{cases} \quad \text{при } j = 4.$$

Побудуємо сегмент кривої *B*-сплайну, та ортогональну ізотермічну плоску сітку. Візьмемо сегмент *j=2.*

Сегмент кривої ізотропного періодичного нормалізованого *B*-сплайну зображений на рис.1а. За результатом розрахунку виразів (12) побудуємо ізотропний періодичний нормалізований *B*-сплайн четвертого порядку з кратними вершинами. *B*-сплайн, що складається з п'яти сегментів $\mathrm{r}_j(t), \quad \mathrm{j} = 0..4$, зображено на рис.1б.

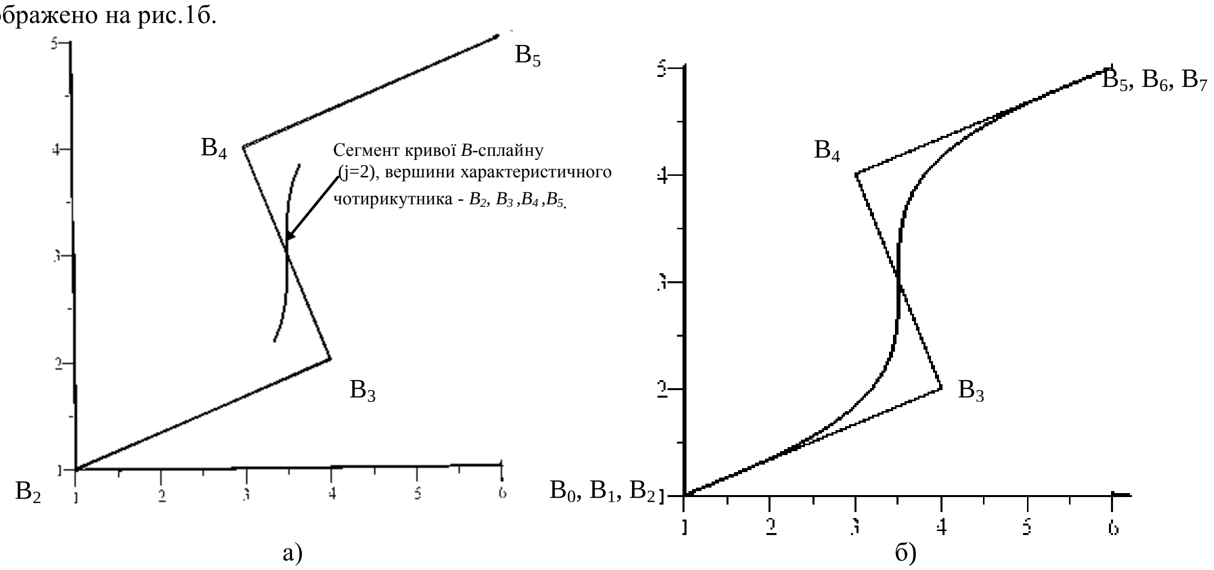

Рис. 1. а) Сегмент кривої ізотропного періодичного нормалізованого *B*-сплайну четвертого порядку (*j*=2)
б)Ізотропний періодичний *B*-сплайн четвертого порядку з нормалізованою параметризицією

Підставимо отримані значення у вираз (8). Розрахуємо ортогональну ізотермічну плоску сітку, для сегменту кривої при *j*=2. Результат зображено на рис.2.

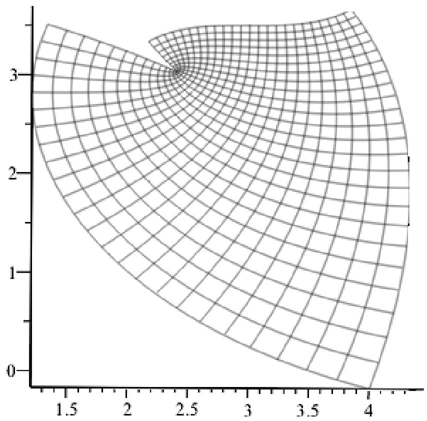

Рис. 2. Ортогональна ізотермічна плоска сітка на основі кривої *B*-сплайну (сегмент *j*=2)

Розрахуємо ортогональні ізотермічні плоскі сітки для інших сегментів кривої модифікованого *B*-сплайну. Візьмемо значення j=0,1,3,4. Отриманий результат зображено на рис.3.

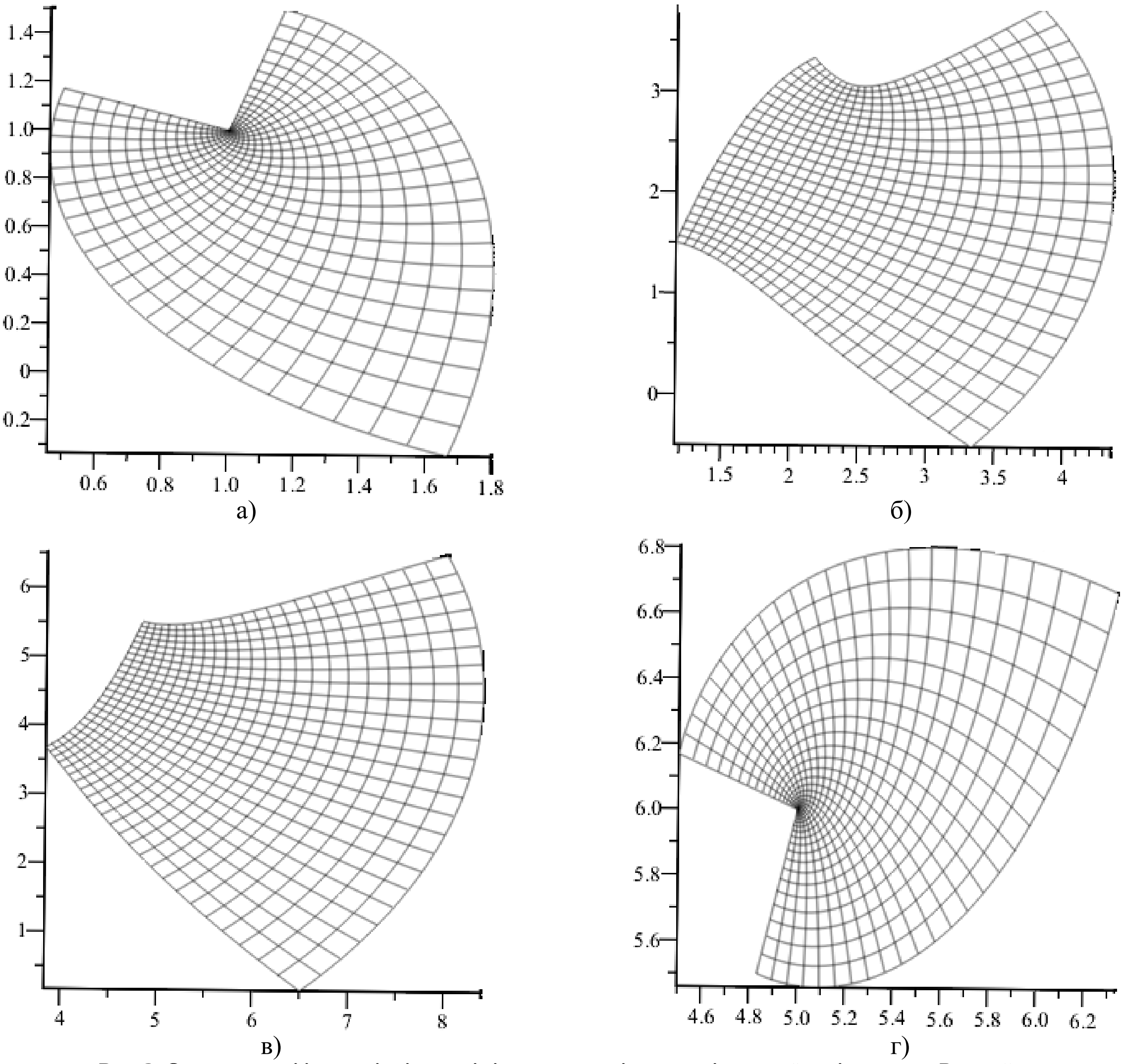

Рис. 3. Ортогональні ізотермічні плоскі сітки на основі сегментів кривої періодичного *B*-сплайну
а) сегмент кривої j=0 , б) сегмент кривої j=1, в) сегмент кривої j=3, г) сегмент кривої j=4.

Висновки

Дослідження показали, що модифікація періодичного нормалізованого *B*-сплайну четвертого порядку на основі ізотропної кривої дозволяє будувати плоскі сітки, які володіють властивостями ортогональності та ізотермічності. Форму сіток визначає уявний характеристичний чотирикутник. Подальші дослідження пов'язані з моделюванням порцій поверхонь з застосуванням розробленого підходу.

Список використаної літератури

1. Аушева Н.М. Побудова поверхонь з ортогональними координатними сітками на основі ізотропних кривих / Н.М. Аушева, А.А. Демчишин // „Прикладна геометрія та інженерна графіка”.- К.:КНУБА, 2013- Вип.91.-С.2-7.
2. Аушева Н.М. Моделювання плоских сіток на основі дробово-раціональних ізотропних кривих / Н.М. Аушева//Журнал «Технологічний аудит та резерви виробництва»:Наукові підсумки 2013.- Т.6,№4(14).-Редакція «Східно-Європейського журналу передових технологій»-С.41-43.
3. Норден А.П. Теория поверхностей / А.П. Норден. – М.: Гос. изд-во технико–теоретической литературы, 1956. – 260 с.
4. Дзюба В.В. Конструювання і перетворення поверхонь із збереженням ліній кривини: автореф. дис… канд. техн. наук: 05.01.01 / В.В. Дзюба. – К.: КНУБА, 2008. – 21 с.
5. Аушева Н.М. Моделювання мінімальних поверхонь Без`є / Н.М. Аушева // Прикладна геометрія та інженерна графіка. Праці / Таврійський державний агротехнологічний університет - Вип.4, т.50.- Мелітополь: ТДАТУ, 2011. - С.105-109.

6. Аушева Н. М. Ізотропні багатокутники ізотропних кривих Без`є / Н.М. Аушева // Міжвідомчий науково-технічний збірник „Прикладна геометрія та інженерна графіка”.-Вип.88.-К.:КНУБА, 2011р.-С.57-61.
7. Аушева Н.М. Конструювання плоскої кривої Без’є з уявними довжинами характеристичного многокутника/ Н.М. Аушева // Прикладна геометрія та інженерна графіка. Праці / Таврійський державний агротехнологічний університет - Вип.4, т.58.-Мелітополь: ТДАТУ, 2014. - С.8-13.