

**ВАРИАТИВНОЕ ДИСКРЕТНОЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ОДНОМЕРНЫХ ОБВОДОВ С ЗАДАНЫМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-
ГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ СВОЙСТВАМИ**

Рассматривается задача формирования пространственных одномерных обводов с закономерным изменением кривизны и кручения. Методика основана на формировании кривой по отдельным монотонным участкам, с последующей их стыковкой.

Ключевые слова: дискретно представленная кривая, тетраэдр расположения кривой, полярный торс, кривизна, кручение.

Є.А. ГАВРИЛЕНКО

Таврійський державний агротехнологічний університет

**ВАРІАТИВНЕ ДИСКРЕТНЕ ГЕОМЕТРИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ОДНОВИМІРНИХ
ОБВОДІВ З ЗАДАНИМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ГЕОМЕТРИЧНИМИ ВЛАСТИВОСТЯМИ**

Розглядається задача формування просторових одновимірних обводів з закономірною зміною кривини та скруту. Методика заснована на формуванні кривої по окремим монотонним ділянкам з наступною їх стыковкою.

Ключові слова: дискретно представлена крива, тетраедр розташування кривої, полярний торс, кривина, скрут.

E.A. GAVRILENKO

Tavria State Agrotechnological University

**VARIATIVE DISCRETE GEOMETRICAL MODELING OF ONE-DIMENSIONAL
CONTOURS WITH THE GIVEN DIFFERENTIAL-GEOMETRIC CHARACTERISTICS**

The task of forming of spatial one-dimensional contours with regular change of curvature and torsion is considered. The method is based on the formation of a curve on a separate monotonous sections and their subsequent docking.

Keywords: discretely represented curve, tetrahedron of location of curve, polar torso, curvature, torsion.

Постановка проблемы

Формирование сложных функциональных поверхностей на основе массива точек является актуальной задачей геометрического моделирования. Координаты точек могут быть получены в результате замеров на физических образцах или рассчитаны исходя из условий работы изделия. Это может быть кинематическая схема движения изделия, заданный характер обтекания поверхности средой, условия компоновки.

Создание геометрической модели такой поверхности предполагает формирование дискретного линейчатого каркаса. Линейными элементами каркаса являются одномерные обводы, полученные в результате интерполяции точечных рядов.

Функциональные качества поверхности определяются дифференциально-геометрическими характеристиками одномерных элементов модели. Это порядок гладкости обвода, фиксированные характеристики в узловых точках, динамика изменения дифференциально-геометрических характеристик вдоль кривой.

На данный момент наиболее разработаны методы непрерывного геометрического моделирования (НГМ), формирующие одномерные обводы на основе аналитически заданных кривых линий. Участки кривых стыкуются в узловых точках с обеспечением характеристик обвода, заданных в этих точках. Современные САД-пакеты используют именно такую методику формообразования одномерных обводов.

Недостатком методов НГМ является то, что наращивание условий, накладываемых на обвод, требует увеличения параметрического числа кривых линий, формирующих его участки. Увеличение параметрического числа усложняет, или делает невозможным контроль формы кривой и графиков изменения ее характеристик внутри участков.

Недостатки методов НГМ ограничивают их возможности по обеспечению требований к формированию линейных элементов моделей динамических поверхностей. Функциональное назначение динамической поверхности – обеспечение ламинарного характера обтекания изделия средой. Требованиями к линейным элементам модели такой поверхности является закономерное изменение кривизны и кручения

при обеспечении заданного порядка гладкости и фиксации обвода.

Задача формирования сложных геометрических образов по заданным условиям может эффективно решаться методами дискретного геометрического моделирования. Дискретное геометрическое моделирование предполагает задание поверхности исходным точечным массивом, а линейных элементов модели – точечным рядом.

Дискретное представление исходных данных и результата моделирования означает, что геометрический образ и его характеристики не определены однозначно на всех этапах моделирования. Дискретное моделирование обводов по заранее определенным условиям требует разработки алгоритмов, основанных на использовании специальных критериев, позволяющих оценивать характеристики дискретно представленных геометрических образов.

Анализ последних исследований и публикаций

Из методов непрерывного геометрического моделирования широкое применение получило формирование сложных геометрических образов на основе В-сплайнов. В-сплайн определяется задающими точками, каждой из которых соответствует функция сопряжения [6]. Дискретный характер исходных данных обеспечивает гибкость управления формой кривой. Порядок гладкости обвода обеспечивается степенью функций сопряжения. Большинство САД-пакетов формируют одномерные обводы на основе кубических В-сплайнов. Кубический В-сплайн автоматически обеспечивает второй порядок гладкости обвода и позволяет контролировать возникновение осцилляции с помощью задающего многоугольника. При назначении в узловых точках фиксированных положений касательных и значений кривизны контроль возникновения осцилляции резко усложняется. Корректировка графика изменения кривизны вдоль обвода возможна в ручном режиме и может быть эффективной при интерполировании небольшого количества узлов. Обеспечить закономерное изменение кривизны вдоль обводов сложной конфигурации, состоящих из большого числа участков, практически невозможно.

Из известных направлений дискретного геометрического моделирования наиболее широкие возможности формирования сложных геометрических образов по заданным условиям дает вариативное дискретное геометрическое моделирование (ВДГМ). ВДГМ предполагает формирование обвода в виде сколь угодно большого количества точек, получаемых в результате последовательных сгущений исходного точечного ряда [4]. Основными особенностями ВДГМ являются:

- дискретное представление исходных данных и результата моделирования;
- вариативность решения;
- локальность формообразования;
- предотвращение осцилляции;
- пошаговый контроль и корректировка формируемой модели.

Существующие на данный момент методы ВДГМ решают задачу формирования плоских дискретно представленных кривых (ДПК). Методы, обеспечивающие отсутствие осцилляции и первый порядок гладкости обвода разработаны в [1]. В качестве параметра формообразования используется положение касательных к обводу, назначаемых в узлах. Метод формирования обвода второго порядка гладкости разработан в [2]. Формообразующими параметрами обвода являются значения кривизны, назначаемые в узловых точках и условие монотонного изменения кривизны вдоль обвода. Методы ВДГМ пространственных обводов с заданными геометрическими характеристиками в настоящее время не разработаны.

Формулирование цели исследования

Задачей разрабатываемого нами направления ВДГМ на основе пространственных угловых параметров является создание единой методики формирования плоских и пространственных одномерных обводов с обеспечением заданных геометрических свойств и особых условий.

Создаваемые в рамках разрабатываемого направления методы объединяют общие особенности.

1. Формируемая кривая представлена упорядоченным множеством принадлежащих ей точек и дифференциально-геометрическими характеристиками кривой. Эти характеристики необходимо обеспечить в процессе моделирования. Такую кривую будем называть дискретно представленная кривая или ДПК.

2. Кривая формируется сгущением, предполагающим определение для исходного точечного ряда промежуточных точек. При этом полагаем, что исходные точки заданы без погрешности и в процессе моделирования не изменяют своего положения.

3. ДПК формируется на основе любого точечного ряда по участкам, на которых возможно обеспечить монотонное изменение значений кривизны и кручения. Монотонные участки стыкуются с заданным порядком гладкости.

Изложение основного материала исследования

Рассмотрим ДПК, представленную пространственным точечным рядом. Каждые три последовательные точки определяют плоскость. Будем называть эти плоскости прилегающими (ПП).

Потребуем, чтобы угол между смежными ПП (φ_i), внутри которого располагается участок ДПК, не превышал 180° . Тогда направление поворота i -й ПП относительно хорды $[i; i+1]$ на угол φ_i до совмещения с $i+1$ -й ПП совпадает с направлением хода ДПК (рис. 1).

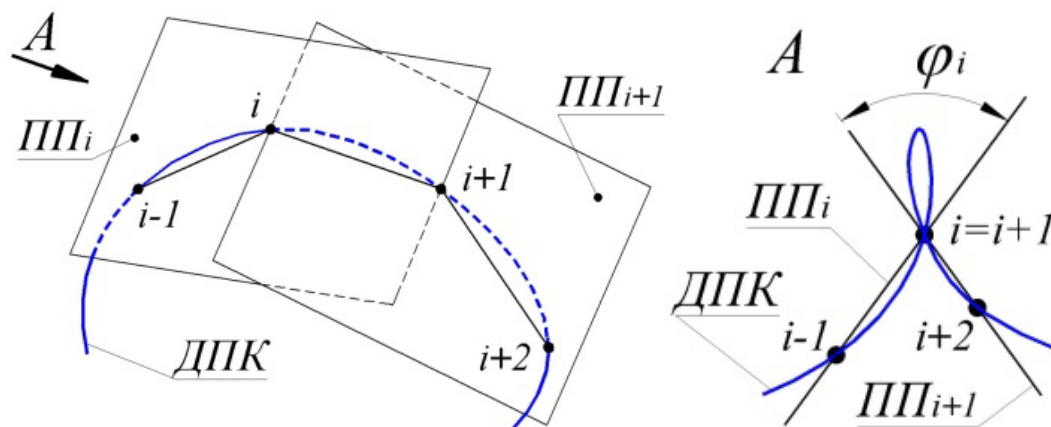


Рис. 1. Расположение прилегающих плоскостей

Четыре последовательные ПП, проходящие через i -ю и $i+1$ -ю точки ограничивают тетраэдр. Этот тетраэдр является областью возможного расположения ДПК постоянного хода на участке $(i, i+1)$. Цепочка последовательных тетраэдров, определенных на всех участках, является областью расположения гладкой кривой линии постоянного хода, интерполирующей исходный точечный ряд (рис. 2).

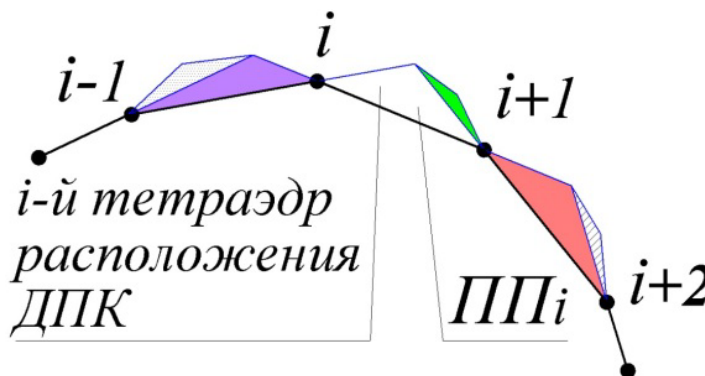


Рис. 2. Исходная область расположения ДПК

Касательная к ДПК (t_i) располагается внутри двух смежных двугранных углов: φ_i и φ_{i+1} . Назначение касательной t_i определяет плоскости, касающиеся ДПК в точке i и проходящие через предыдущую ($i-1$) и последующие ($i+1$) исходные точки. Плоскости, касающиеся ДПК в одной точке, ограничивают диапазон возможного расположения соприкасающейся плоскости.

Назначение касательных и соприкасающихся плоскостей уточняет тетраэдр расположения ДПК. В результате получаем новую цепочку тетраэдров, грани которых принадлежат касательным и соприкасающимся плоскостям. Эта цепочка тетраэдров – область возможного расположения гладкой ДПК постоянного хода, в узлах которой назначены положения основных трехгранников.

Точка сгущения ($i_{сг}$) назначается внутри тетраэдра расположения ДПК. Для нее, внутри соответствующих диапазонов, назначается положения касательных и соприкасающихся плоскостей. В результате на каждом участке получаем два новых тетраэдра.

Назначение касательных прямых, соприкасающихся плоскостей, точек сгущения внутри соответствующих диапазонов обеспечивает формирование, в процессе последовательных сгущений, обвода первого порядка гладкости, постоянного хода, который интерполирует исходный точечный ряд.

Обвод второго порядка гладкости формируется на основе полярного торса (ПТ) ДПК. ПТ является огибающей поверхностью семейства нормальных плоскостей пространственной кривой линии. Кривую линию можно представить как траекторию движения точки, принадлежащей нормальной плоскости, которая обкатывает ПТ.

Рассмотрим задачу формирования ПТ, задающего ДПК, интерполирующую исходный точечный ряд. Проведем через середины хорд сопровождающей ломаной линии ДПК плоскости, перпендикулярные хордам (P_i). Пересекаясь, перпендикулярные плоскости образуют гранную поверхность, которую будем рассматривать как дискретный аналог ПТ (рис. 3).

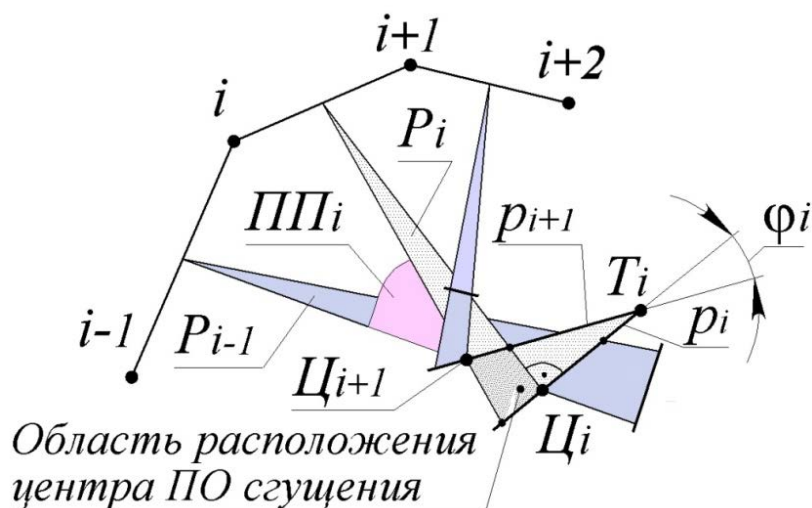


Рис. 3. Формирование гранной поверхности перпендикулярных плоскостей

Смежные P_i пересекаются по прямым (p_i), на которых расположены центры прилегающих окружностей (C_i). Это окружности, проходящие через три последовательные точки ДПК. По аналогии с осями кривизны непрерывной кривой, будем называть прямые p_i осями прилегающих окружностей (ПО) ДПК. Оси ПО, пересекаясь, определяют ломаную линию, являющуюся дискретным аналогом ребра возврата ПТ.

Пусть исходный точечный ряд определяет гранную поверхность, вдоль которой углы φ_i между последовательными осями ПО изменяются в одном направлении, а значения радиусов ПО изменяются монотонно.

Разработанные алгоритмы обеспечивают сохранение указанных закономерностей при любом количестве сгущений точечного ряда. Тогда в пределе получим ПТ, ребро возврата которого – гладкая спираль постоянного хода. Этот ПТ задает обвод второго порядка гладкости с монотонным изменением кривизны, и этот обвод интерполирует исходный очечный ряд.

Назначая в исходных точках ДПК касательные прямые, мы задаем в них положения нормальных плоскостей (N_i). В результате получаем гранную поверхность, состоящую из участков P_i и N_i (рис. 4).

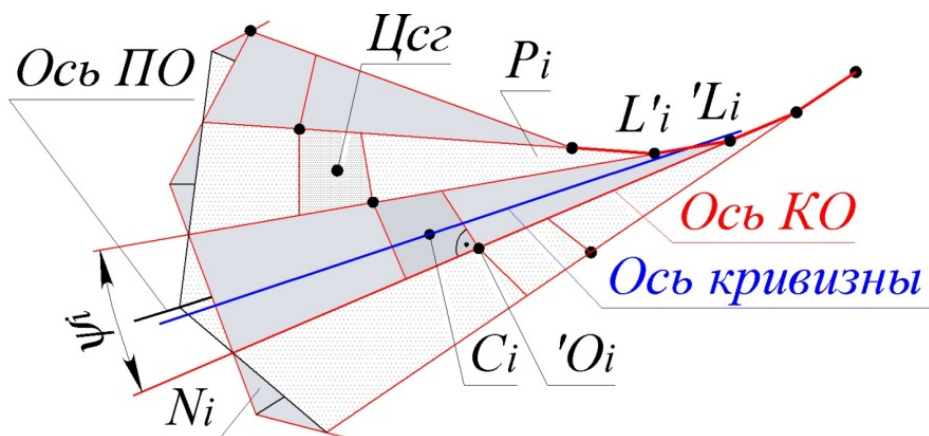


Рис. 4. Формирование гранной поверхности нормальных плоскостей

Прямые пересечения P_i и N_i будем называть осями касательных окружностей (КО) ДПК. Центры окружностей (O_i), касательных с обводом в исходных точках, и проходящие через ближайшие точки ДПК принадлежат осям КО. Пересекаясь между собой, оси КО формируют ломаную линию – уточненный аналог ребра возврата. На P_i оси КО ограничивают уточненную область расположения центра ПО сгущения (C_{c2}). На нормальной плоскости N_i оси КО ограничивают сектор возможного расположения оси кривизны ДПК в точке i . В процессе последовательных сгущений этот сектор уменьшается и сходится к оси кривизны, а хорда ломаной линии сходится к точке – центру i -ой соприкасающейся сферы.

При формировании ПТ на основе гранной поверхности нормальных плоскостей для исходных точек ДПК могут быть заранее заданы положения осей кривизны. На оси кривизны назначается центр кривизны (C_i) и центр соприкасающейся сферы ДПК.

При формировании плоской ДПК, для которой ПТ является цилиндрической поверхностью, схема сгущения точечного ряда значительно упрощается. В этом случае вместо перпендикулярных плоскостей P_i используются перпендикулярные прямые, вместо нормальных плоскостей – нормали ДПК, а вместо гранной поверхности – ломаная линия.

Плоская ДПК формируется на основе двух цепочек базисных треугольников. Одна ограничена касательными прямыми и является областью расположения ДПК [7]. Другая ограничена нормальными и является областью расположения эволюты кривой [3].

Выводы

В результате проведенных исследований разработана общая методика формирования одномерных обводов. Методика основана на сгущении точечного ряда и не требует аналитического представления участков обвода. Необходимым этапом формирования обвода является анализ, в результате которого определяется область возможного расположения кривой и диапазоны возможных значений ее дифференциально-геометрических характеристик. Границы диапазонов рассчитываются исходя из динамики изменения кривизны и кручения, которая определяется на основании параметров исходного точечного ряда.

Разработанные методы обеспечивают формирование обводов второго порядка гладкости с закономерным изменением кривизны и кручения. В зависимости от условий, накладываемых на моделируемую кривую, в качестве параметров формообразования используются величины двугранных углов между прилегающими, касательными и соприкасающимися плоскостями; положение осей кривизны; значения радиусов прилегающих, касательных и соприкасающихся окружностей. При этом существует возможность пошагового контроля и корректировки получаемого решения, наложения на него дополнительных условий, гарантируется отсутствие осцилляций.

Определение области возможного расположения кривой позволяет оценить абсолютную погрешность, с которой формируемая ДПК представляет обвод, отвечающий условиям задачи.

Формирование обвода по участкам с монотонным изменением дифференциально-геометрических характеристик обеспечивает устойчивость методов к изменению исходных условий.

Последовательная локализация области расположения кривой и диапазонов значений ее характеристик гарантирует сходимость процесса моделирования к единственному решению – непрерывному однопараметрическому множеству точек с заданными дифференциально-геометрическими свойствами.

Список использованной литературы

1. Верещага В.М. Дискретно - параметрический метод геометрического моделирования кривых линий и поверхностей: дисс. ... д-ра техн. наук: 05.01.01 / В.М. Верещага. – Мелитополь, 1996.–320 с.
2. Гавриленко Е.А. Дискретное интерполирование плоских одномерных обводов с закономерным изменением кривизны: дисс. ... к-та. техн. наук: 05.01.01 / Е.А. Гавриленко. – Мелитополь, ТГАТА, 2004. – 149 с.
3. Гавриленко Е.А. Формирование плоских обводов заданного порядка гладкости / Е.А. Гавриленко // Прикладна геометрія та інженерна графіка: міжвідомчий науково-технічний збірник / КНУБА. – К.: 2012. – Вип. 90. – С. 74-78.
4. Найдиш В.М. Дискретна інтерполяція: навчальний посібник / В.М. Найдиш – Мелітополь: Люкс, 2008. – 250 с.
5. Рашевский П.К. Курс дифференциальной геометрии / П.К. Рашевский – М.: ГИТТЛ, 1956. – 420 с.
6. Херн Д. Компьютерная графика и стандарт Open GL / Д. Херн, М.П. Бейкер – С-Пб.: Вильямс, 2005. – 1159 с.
7. Холодняк Ю.В. Формування геометричних характеристик при моделюванні монотонної дискретно представленої кривої / Ю.В. Холодняк, Є.А. Гавриленко // Прикладна геометрія та інженерна графіка: міжвідомчий науково-технічний збірник / КНУБА. – К.: 2013. – Вип. 91. – С. 292-297.