

В.М. КОМЯК, А.Ю. ПРИХОДЬКО
Национальный университет гражданской защиты Украины
А.В. ПАНКРАТОВ
Институт проблем машиностроения НАН Украины

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ОПТИМИЗАЦИИ РАЗМЕЩЕНИЯ ПУНКТОВ
НАБЛЮДЕНИЯ НАЗЕМНЫХ СИСТЕМ ВИДЕО-МОНИТОРИНГА
ЛЕСНЫХ ПОЖАРОВ**

В статье предложены математические модели оптимизации размещения пунктов наземных систем видео-мониторинга, приведены тестовые примеры локальной оптимизации покрытия области кругами переменных радиусов

Ключевые слова: наземные системы видео-мониторинга, оптимизация, локальная оптимизация покрытия и размещения

В.М. КОМЯК, О.Ю. ПРИХОДЬКО
Національний університет цивільного захисту України
О.В. ПАНКРАТОВ
Інститут проблем машинобудування НАН України

**МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ОПТИМІЗАЦІЇ РОЗМІЩЕННЯ ПУНКТІВ СПОСТЕРЕЖЕННЯ
НАЗЕМНИХ СИСТЕМ ВИДЕО-МОНИТОРИНГУ ЛІСНИХ ПОЖЕЖ**

У статті запропоновано математичні моделі оптимізації розміщення пунктів наземних систем відео-моніторингу, наведено тестові приклади локальної оптимізації покриття області кругами змінного радіусу

Ключові слова: наземні системи відео-моніторингу, оптимізація, локальна оптимізація покриття та розміщення.

V.M.KOMYAK, A.YU.PRIKHODKO
National university of the civil protection of the Ukraine
O.V.PANKRATOV
Institute of the problems of mashinostroenie NAN of the Ukraine

**MATHEMATICAL MODELS OF THE OPTIMIZATION OF THE ARRANGEMENT OF THE
OBSERVATION POINTS OF THE GROUND-BASED SYSTEMS OF VIDEO- MONITORING
THE FOREST FIRES**

In the article the mathematical models of the optimization of the arrangement of the points of the ground-based systems of video- monitoring are proposed, the test examples to the local optimization of coating region with the circles of the variable radii are given

Keywords: ground-based systems of video-monitoring, optimization, local optimization gutters and placement

Постановка проблемы

Одним из подходов к раннему выявлению лесных пожаров является их мониторинг [1], как космический [2], так и наземный [3,4]. Данные мониторинга различных уровней (наземного и космического) составляют единую архитектуру информационных слоев геоинформационных систем противопожарного мониторинга лесов.

Одной из проблем проектирования наземных систем видео-мониторинга является оптимизация размещения пунктов наблюдения.

Анализ последних достижений и публикаций

Задача оптимального размещения вышек может быть сформулирована как задача покрытия. Оптимальность покрытия кругами одного радиуса при размещении центров кругов в вершинах равностороннего треугольника, разбивающих область, показана в [5]. Один из подходов к решению задачи покрытия кругами разных радиусов изложен в [6]. В работах [3 – 4] рассматривается задача наземного мониторинга лесных массивов с помощью вышек наблюдения для случая, когда каждая вышка

контролирует круговые зоны разных радиусов и задача сводится к задаче покрытия невыпуклого многосвязного многоугольника (лесного массива с областями запрета) кругами разного радиуса. Задача решается эвристически без учета разного уровня пожарной опасности участков леса, рельефа местности, условий не размещения вышек в областях запрета. В работах [7 – 9] предложены методы математического и компьютерного моделирования оптимального покрытия области кругами, но учет перечисленных выше ограничений требует как разработки новых методов моделирования рационального покрытия, так и модификации существующих.

Формулирование цели исследования

Целью статьи является построение математических моделей оптимизации размещения пунктов наземных систем видео-мониторинга и на их основе – создание методов решения.

Изложение основного материала исследования

Задана невыпуклая многоугольная область S_0 , описывающая участок леса. Область S_0 может быть несвязной (например, разделенной рекой) с многосвязными компонентами связности (например, содержащими пруды и озера). Поскольку различные участки леса могут иметь пожарную опасность одного из пяти возможных классов [10], область S_0 задана в виде объединения подобластей с разными классами

пожарной опасности $S_0 = \bigcup_{j=1}^5 S_{0j}$, $\text{int } S_{0i} \cap \text{int } S_{0j} = \emptyset$, $i < j = 1, 2, \dots, 5$. Некоторые из

компонент S_{0j} могут быть пустыми множествами. При этом область S_0 должна контролироваться некоторой аппаратурой видеонаблюдения, устанавливаемой на вышках S_k , $k = 1, 2, \dots, n$, расположенных в точках $C_k = (x_k, y_k)$. Высота вышек может дискретно изменяться от минимального значения h_{\min} до максимального h_{\max} с заданным шагом дискретности Δh , при этом стоимость вышки изменяется линейно в зависимости от ее высоты. Вышки не могут быть расположены в некоторых областях (водоемах, болотистых территориях и т.д.) и к ним должен быть доступ для профилактических и ремонтных работ, что обеспечивается заданием описанных невыпуклыми многоугольниками и/или кругами областей запрета V_t , $C_k \notin V_t$, $k = 1, 2, \dots, N$, $t = 1, 2, \dots, m$. Каждая из вышек S_k контролирует некоторую территорию, которую можно приближенно представить в виде круга C_k радиуса R_k , при этом центр круга в общем случае не совпадает с точкой C_k . Радиус круга R_k зависит от рельефа окружающей местности, заданного уравнением поверхности $F(x, y, z) = 0$. Размещение контролирующей аппаратуры на более высокой местности (с большей относительно среднего значения величиной высоты над уровнем моря z) приводит к увеличению контролируемой площади, а размещение в низменностях (с меньшей относительно среднего значения величиной z) соответственно уменьшает радиус обзора. Таким образом, радиус и положение центра кругов C_k зависит (в общем случае нетривиальным образом) от высоты вышек, рельефа местности и класса пожарной опасности в окрестностях точек C_k размещения вышек с пожарными извещателями. Следует отметить, что если используется аппаратура нескольких видов, то радиус обзора зависит также и от вида используемой аппаратуры

Необходимо построить покрытие области S_0 зонами обнаружения C_k , $k = 1, 2, \dots, N$, так, чтобы точки C_k не принадлежали областям V_t , $t = 1, 2, \dots, m$ и достигался оптимум некоторого критерия качества.

В рамках предложенной в [11] концепции можно сформулировать, описать в аналитическом виде и решить несколько тесно связанных задач, различающихся функциями цели. Общим является условие, что пожарные извещатели своими зонами защиты переменного радиуса должны полностью покрывать лесной массив при выполнении следующих ограничений (условий):

- радиус каждого круга (обзора с вышки) строится с учетом зависимости от рельефа и класса пожарной опасности защищаемого вышкой участка лесного массива;

– пункты наблюдения принадлежат области $R^2 \setminus \text{int} \bigcup_{t=1}^m V_t$, где $\text{int} V$ – внутренность V .

Замечание 1. Для покрытия, даже оптимального, выполнение условий $c_k \in S_0$ необязательно (например, подковообразный участок может быть оптимально покрыт круговой зоной обнаружения с центром, ему не принадлежащим). Поэтому, в случае необходимости, условие $c_k \in S_0$ может быть обеспечено заданием зоны запрета $V_0 = R^2 \setminus \text{int} S_0$.

Замечание 2. Поскольку произвольная невыпуклая многоугольная область может быть всегда представлена в виде объединения выпуклых частей (например, по методу, изложенному в [12]), в дальнейшем полагаем, что все зоны запрета являются выпуклыми.

Предлагается модификация изложенного в работе [11] подхода к покрытию области S_0 круговыми зонами S_k переменного радиуса R_k с учетом рельефа, зон пожароопасности, и зон запрета, принимающая во внимание особенности используемых в процессе расчета методов интерполяции и генерации области допустимых решений задачи. Как известно, на равнине размещенный в точке $C_k = (x_k, y_k)$ на вышке с высотой h_k пожарный извещатель обслуживает круговую зону радиуса не более чем R_k (может быть менее при использовании аппаратуры с малым радиусом обнаружения), где R_k (км) = $R_k(h_k) \approx 3.57 \sqrt{h_k}$ (м) с центром в точке C_k . Согласно методу учета рельефа, изложенному в [11], обслуживаемая зона преобразуется в множество, которое может быть приближенно аппроксимировано «приведенным» кругом радиуса

$$R'_i = R'_i(x_i, y_i, z_i + h_i) \quad (1)$$

с центром в точке $C'_i = (x'_i, y'_i)$,

$$x'_i = x'_i(x_i, y_i, z_i + h_i), \quad (2)$$

$$y'_i = y'_i(x_i, y_i, z_i + h_i). \quad (3)$$

При условии, что задано допустимое начальное размещение пожарных извещателей и высоты соответствующих им вышек (построенное автоматически или в интерактивном режиме), в рамках предлагаемого подхода могут быть поставлены и решены следующие задачи:

1. минимизация стоимости создания и функционирования системы обнаружения путем уменьшения количества пожарных извещателей;
 2. минимизация стоимости создания и функционирования системы обнаружения путем уменьшения высоты вышек;
 3. повышение надежности функционирования системы путем увеличения перекрытия зон обнаружения;
- Построены выражения (1)-(3) в аналитическом виде [13].

Утверждение. Для того, чтобы размещение кругов являлось покрытием многоугольника S_0 , необходимо и достаточно, чтобы оно удовлетворяло условиям:

- 1) для любой вершины p_k области S_0 существует такой круг C_{i_1} , что $v_{i_1 k} = p_k \in C_{i_1}$, $C_{i_1} \not\subset P$.
- 2) если существует точка $t \in \text{fr} C_{i_2} \cap \text{fr} S_0$, $C_{i_2} \not\subset S_0$, то существуют круг C_{j_2} , $i_2 \neq j_2$, и точка $v_{i_2 j_2} = (x_{i_2 j_2}, y_{i_2 j_2})$ такие, что $v_{i_2 j_2} \in C_{i_2}$, $v_{i_2 j_2} \in C_{j_2}$, $v_{i_2 j_2} \in R^2 \setminus \text{int} S_0$;
- 3) если существует точка $t = \text{fr} C_{i_3} \cap \text{fr} C_{j_3}$ и при этом $t \in \text{fr} S_0$, то существуют C_s , $s \neq i_3$, $s \neq j_3$, и точка $v_{i_3 j_3 s} = (x_{i_3 j_3 s}, y_{i_3 j_3 s})$ такие, что $v_{i_3 j_3 s} \in C_{i_3}$, $v_{i_3 j_3 s} \in C_{j_3}$, $v_{i_3 j_3 s} \in C_s$;
- 4) если существует точка $t_k \in \text{fr} C_{i_4} \cap \text{fr} C_{j_4}$ и $t_k \in \text{int} C_{s_k}$, $k=1, 2$, $i_4 \neq j_4$, то существуют круг C_{s_k} , $s_k \neq i_4$, $s_k \neq j_4$, и точка $v_{i_4 j_4 s_k} = (x_{i_4 j_4 s_k}, y_{i_4 j_4 s_k})$ такие что $v_{i_4 j_4 s_k} \in C_{i_4}$, $v_{i_4 j_4 s_k} \in C_{j_4}$, $v_{i_4 j_4 s_k} \in C_{s_k}$.

С учетом вышесказанного и материала, изложенного в [11], математическая модель задачи покрытия области зонами обнаружения может быть сформулирована как задача локальной оптимизации на области допустимых решений W , заданной системой ограничений

$$\phi_{il}(x_i, y_i) \geq 0, \quad l = 1, 2, \dots, m, \quad (4)$$

$$x_i'' = k_{xi}(x - x_{io}), \quad y_i'' = k_{yi}(y - y_{io}), \quad (5)$$

$$0 \leq x_i'' \leq 1, \quad 0 \leq y_i'' \leq 1, \quad (6)$$

$$x_i' = F_{xi}(x_i'', y_i''), \quad y_i' = F_{yi}(x_i'', y_i''), \quad R_i' = F_{Ri}(x_i'', y_i''), \quad (7)$$

$$i = 1, 2, \dots, N,$$

и неравенствами

$$(x'_{i_1} - x_t)^2 + (y'_{i_1} - y_t)^2 \leq R_{i_1}'^2, \quad (8)$$

для всех вершин области и кругов, удовлетворяющих условиям пункта 1 утверждения,

$$\begin{cases} (x'_{i_2} - x_{i_2j_2})^2 + (y'_{i_2} - y_{i_2j_2})^2 \leq R_{i_2}'^2 \\ (x'_{j_2} - x_{i_2j_2})^2 + (y'_{j_2} - y_{i_2j_2})^2 \leq R_{j_2}'^2, \\ f_{i_2j_2}(x_{i_2j_2}, y_{i_2j_2}) \geq 0 \end{cases} \quad (9)$$

для всех пар кругов, удовлетворяющих условиям пункта 2 утверждения,

$$\begin{cases} (x'_{i_3} - x_{i_3j_3s})^2 + (y'_{i_3} - y_{i_3j_3s})^2 \leq R_{i_3}'^2 \\ (x'_{j_3} - x_{i_3j_3s})^2 + (y'_{j_3} - y_{i_3j_3s})^2 \leq R_{j_3}'^2 \\ (x'_s - x_{i_3j_3s})^2 + (y'_s - y_{i_3j_3s})^2 \leq R_s'^2 \end{cases} \quad (10)$$

для всех троек кругов, удовлетворяющих условиям пункта 3 утверждения,

$$\begin{cases} (x'_{i_4} - x_{i_4j_4s_1})^2 + (y'_{i_4} - y_{i_4j_4s_1})^2 \leq R_{i_4}'^2 \\ (x'_{j_4} - x_{i_4j_4s_1})^2 + (y'_{j_4} - y_{i_4j_4s_1})^2 \leq R_{j_4}'^2 \\ (x'_{s_1} - x_{i_4j_4s_1})^2 + (y'_{s_1} - y_{i_4j_4s_1})^2 \leq R_{s_1}'^2 \end{cases} \quad (11)$$

и

$$\begin{cases} (x'_{i_4} - x_{i_4j_4s_2})^2 + (y'_{i_4} - y_{i_4j_4s_2})^2 \leq R_{i_4}'^2 \\ (x'_{j_4} - x_{i_4j_4s_2})^2 + (y'_{j_4} - y_{i_4j_4s_2})^2 \leq R_{j_4}'^2 \\ (x'_{s_2} - x_{i_4j_4s_2})^2 + (y'_{s_2} - y_{i_4j_4s_2})^2 \leq R_{s_2}'^2 \end{cases} \quad (12)$$

для всех троек кругов, удовлетворяющих условиям пункта 4 утверждения, где $C_i = (x_i, y_i)$ – параметры размещения i -го пожарного излучателя, ϕ_{il} – функция принадлежности точки C_i области $R^2 \setminus \text{int} V_l$, $C_i'' = (x_i'', y_i'')$ – трансформированные параметры размещения, $k_{xi}, k_{yi}, x_{io}, y_{io}$ – коэффициенты трансформации выделенной прямоугольной окрестности точки C_i в квадрат с центром в точке C_i'' , $C_i' = (x_i', y_i')$ и R_i' – координаты центра и радиус «приведенной» круговой зоны обнаружения, F_{xi}, F_{yi} и F_{Ri} – полиномы [13], $v_{i_2j_2} = (x_{i_2j_2}, y_{i_2j_2})$, $v_{i_3j_3s} = (x_{i_3j_3s}, y_{i_3j_3s})$,

$v_{i_4 j_4 s_k} = (x_{i_4 j_4 s_k}, y_{i_4 j_4 s_k})$ – координаты вспомогательных точек, $f_{ij} \geq 0$ – функция принадлежности точки v_{ij} множеству $R^2 \setminus \text{int } S_0$.

Математическая постановка задачи 1. Найти минимум значения R'_i на области допустимых решений W , из описания которой удалены неравенства вида (4), (6) для выбранного i -го объекта, а ограничения (7) принимают вид $x'_i = x''_i, y'_i = y''_i, R'_i = R_i$ и добавлено ограничение $R'_i \geq 0$.

В данной постановке на i -ый круг налагаются только ограничения вида (8)-(12), обеспечивающие условие покрытия области зонами обнаружения. Если в результате решения задачи достигается глобальный экстремум, при котором выполняется $R'_i = 0$, то данный круг может быть удален из полученного покрытия.

Решение задачи производится попеременно для всех пожарных извещателей.

Математическая постановка задачи 2. Найти максимум значения дополнительной переменной t на области допустимых решений W , в описании которой все квадратичные ограничения из (8)-(12) для которых один из индексов $i_1, i_2, i_3, i_4, j_1, j_2, j_3, j_4, s, s_1, s_2$ при R' равен выбранному i , заменены на неравенства вида $(x_q - x'_i)^2 + (y_q - y'_i)^2 \leq (R'_i - t)^2$, где $v_q = (x_q, y_q)$ – точка $v_{i_1 k}, v_{i_2 j_2}, v_{i_3 j_3}$ или $v_{i_4 j_4}$ соответственно.

В задаче максимизируется перекрытие зон обнаружения выбранного круга с остальными зонами обнаружения. Из условий задачи вытекает возможность уменьшения радиуса R'_i на величину t без нарушения условия покрытия области S_0 .

После достижения локального экстремума задачи осуществляется анализ полученного покрытия на предмет уменьшения высоты h_i .

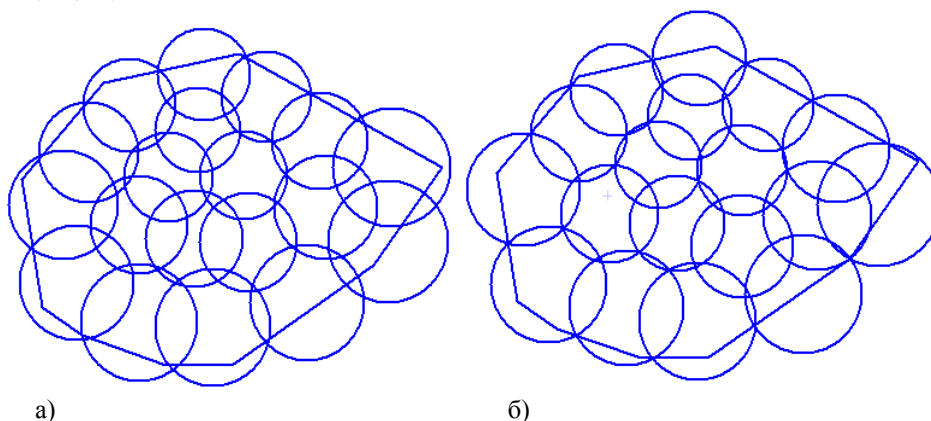
Решение задачи производится попеременно для всех пожарных извещателей.

Математическая постановка задачи 3. Найти максимум значения дополнительной переменной t на области допустимых решений W , в описании которой все квадратичные ограничения из (9)-(12) заменены на неравенства вида $(x_q - x'_i)^2 + (y_q - y'_i)^2 \leq (R'_i - t)^2$, где $v_q = (x_q, y_q)$ – точка $v_{i_2 j_2}, v_{i_3 j_3}$ или $v_{i_4 j_4}$ соответственно.

В результате решения задачи повышается надежность функционирования системы вследствие увеличения взаимного перекрытия зон обнаружения.

Алгоритм решения поставленных задач представлен в [13].

Пусть задана стартовая точка – вектор $(x_1^0, y_1^0, h_1^0, \dots, x_n^0, y_n^0, h_n^0)$, при котором $F(x_1^0, y_1^0, h_1^0, \dots, x_n^0, y_n^0, h_n^0)$ является покрытием S_0 (рис. 1а).



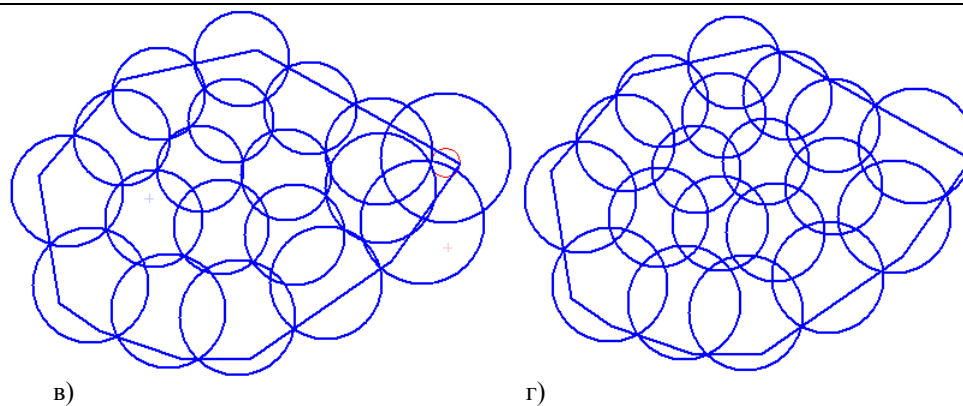


Рис. 1. Оптимизация покрытия области кругами переменных радиусов

(а) – исходное покрытие области, (б) – минимизация числа извещателей, в) – оптимизация радиуса выбранной зоны с целью уменьшения высоты вышки, г) – повышение надежности путем максимизации минимального перекрытия зон.

Стартовая точка может быть получена в интерактивном режиме пользователем с заданием начальных радиусов кругов зон обслуживания, учитывающих как рельеф, так класс зоны. Интерполяционная формула для радиусов зон контроля в тестовом примере имеет вид

$$12 + 4.501x^2 + 9.01y^2 + 11.22xy - 240.03xy^2 - 88.802x^2y - 3.11x^3 - 6.02y^3 + \\ + 208.81xy^3 + 57.6x^3y + 394.8x^2y^2 - 316.8x^2y^3 - 165.61x^3y^2 - 115.21x^3y^3$$

Необходимо определить вектор $u^* = (x_1^*, y_1^*, h_1^*, \dots, x_n^*, y_n^*, h_n^*)$, при котором $F(u)$ является покрытием

S_0 , а радиусы кругов достигали бы минимальных значений и выполнялись бы условия (4) – (12). На рис.1б – 1г представлен тестовый пример решения трех оптимизационных задач для одного стартового покрытия области зонами обнаружения с учетом рельефа местности.

Выводы

В статье предложены математические модели оптимизации размещения пунктов наземных систем видео-мониторинга, приведены тестовые примеры локальной оптимизации покрытия области кругами переменных радиусов.

Список использованной литературы

1. Абрамов Ю.О. Сеть малых космических аппаратов для оперативного обнаружения пожаров / Ю.О. Абрамов, Н.Г. Андрианов, В.Н. Лагуткин, А.П. Лукьянов и др. // Успехи совр. радиоэлектрон. – 2011. - № 8. – С. 42 – 49.
2. Андрианов Н.Г. Сеть малых космических аппаратов для оперативного обнаружения пожаров / Н.Г. Андрианов, В.Н. Лагуткин, А.П. Лукьянов и др. // Успехи совр. радиоэлектрон. – 2011. – № 8. – С. 42 – 49.
3. Кочкарь Д.А. Оптимальное размещение вышек наблюдения наземных систем видео-мониторинга лесных пожаров / Д.А.Кочкарь, С.Ю.Мединцев, А.А.Орехов // Радіоелектронні і комп'ютерні системи.-Харків.2010.-, №7(48).-С.311-314.
4. Бабий С.М. Алгоритм покрытия площади лесного массива кругами видеонаблюдения и контроля / С.М. Бабий, Д.А.Кочкарь, В.В.Чмовж // Радіоелектронні і комп'ютерні системи.-Харків.2010.-, №7(48).-С.272-277.
5. Kershner R. The number of circles covering a set / R. Kershner // Amer. J. Mathematics.-1939.– Vol.61, N3.—P.665-671.
6. Кузнецов В.Ю. Задачи покрытия ортогональных многоугольников с запретными участками / В.Ю.Кузнецов // Вестник УГАТУ.-Уфа.2008.-Т.10, №2(27).–С.177–182.
7. Стоян Ю.Г. Оптимизация покрытий трансляциями ограниченных множеств / Ю.Г. Стоян, С.В. Яковлев // Докл. АН УССР. Сер. А, 1988- № 7.- С.20-23.
8. Стоян Ю.Г., Математическая модель и метод решения задачи упаковки максимального числа равных кругов в невыпуклую область с зонами запрета / Ю.Г. Стоян, А.М. Чугай // Доповіді Національної академії наук України. – 2009. – № 10. – С. 45 – 52.
9. Панкратов А.В. Метод регулярного покрытия прямоугольной области кругами заданного радиуса/ А.В.Панкратов, В.Н.Пацук, Т.Е.Романова, А.А. Антошкин // Радиоэлектроника и информатика. – 2002. – № 1. – С. 50 – 52.

10. Коровин Г.Н. Основные направления развития и совершенствования системы оценки и прогноза пожарной опасности. /Г.Н. Коровин, В.Д. Покрывайло, З.М. Гришман, В.М. Латыпин, И.Ф. Самусенко. //Лесные пожары и борьба с ними – Л.: ЛенНИИЛХ, 1986, – С. 18 – 31.
11. Комяк В.М. / Оптимизация размещения пунктов наблюдения наземных систем видеомониторинга лесных пожаров / В.М. Комяк, А.В. Панкратов, А.Ю. Приходько, С.Д.Светличная // Проблеми пожежної безпеки. Зб. наук. пр. НУЦЗ України. – Вип. 36. – Харків: НУЦЗУ, 2014. – С. 117–126.
12. Гиль Н.И. Декомпозиция двумерных геометрических объектов / Н.И. Гиль, Т.Е. Романова, М.В. Злотник //Доп. НАН України. – 2010. – № 8, –С.43-48.
13. Комяк В.М. Аналитическое описание радиуса обзора и местоположений пунктов наблюдения наземных систем видеомониторинга лесных пожаров/ В.М. Комяк, А.В. Панкратов, А.Ю. Приходько // Проблеми пожежної безпеки. Зб. наук. пр. НУЦЗ України. – Вип. 37. – Харків: НУЦЗУ, 2015. – С. 107–112.