УДК 514.18

Ю.С. ЧАПЛЯ
Національний університет цивільного захисту України

МОДЕЛЬ ТА МЕТОД ОПТИМІЗАЦІЇ РОЗМІЩЕННЯ ПЛОСКИХ НЕОРІЄНТОВАНИХ ГЕОМЕТРИЧНИХ ОБ'ЄКТІВ З КУСОЧНО-НЕЛІНІЙНИМИ ГРАНИЦЯМИ У БАГАТОЗВ'ЯЗНІЙ ОБЛАСТІ

В даній роботі наведено математичну модель оптимізації розміщення плоских неорієнтованих геометричних об'єктів з кусочно-нелінійними границями у багатозв'язній області та одержано оцінку кількості обмежень у даній моделі. Розроблено модифікований метод імітації відпалу для оптимізації розміщення даних об'єктів у зазначеній області.

Ключові слова: математична модель, неорієнтований геометричний об'єкт, багатозв'язна область, метод імітації відпалу.

Ю.С. ЧАПЛЯ
Национальный университет гражданской защиты Украины

МОДЕЛЬ И МЕТОД ОПТИМИЗАЦИИ РАЗМЕЩЕНИЯ ПЛОСКИХ НЕОРИЕНТИРОВАННЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ С КУСОЧНО-НЕЛИНЕЙНЫМИ ГРАНИЦАМИ В МНОГОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ

В данной работе приведена математическая модель оптимизации размещения плоских неориентированных геометрических объектов с кусочно-нелинейными границами в многосвязной области и получена оценка количества ограничений в данной модели. Разработан модифицированный метод имитации отжига для оптимизации размещения данных объектов в указанной области.

Ключевые слова: математическая модель, неориентированный геометрический объект, многосвязная область, метод имитации отжига.

Yu.S. CHAPLYA
National university of civil protection of Ukraine

MODEL AND METHOD OF OPTIMAL PLACEMENT NOT ORIENTED PLANE GEOMETRIC OBJECTS WITH SECTIONAL NONLINEAR FRONTIERS IN MULTIPLY AREA

In this paper the mathematical model of optimal placement not oriented plane geometric objects with sectional nonlinear frontiers in multiply area is given and estimate of the number of restrictions is obtained. The simulated annealing modified method for optimal placement of the objects in specified area is developed.

Keywords: mathematical model, not oriented geometric object, multiply area, simulated annealing method.

Постановка проблеми

На теперішній час актуальною науково-прикладною проблемою є розвиток теорії оптимізаційного геометричного проектування, тобто розробка нових методів обробки та оптимізаційного перетворення складної геометричної інформації для її подальшого ефективного використання. Серед класу задач оптимізаційного геометричного проектування найбільш дослідженими є задачі оптимального розміщення геометричних об'єктів у двовимірному просторі. Так, існують численні дослідження, які присвячені оптимізації розміщення як орієнтованих, так і неорієнтованих плоских геометричних об'єктів з кусочно-лінійними границями у заданих областях, проводяться дослідження стосовно розміщення орієнтованих об'єктів з кусочно-нелінійними границями (границі апроксимуються за допомогою кривих другого порядку, що описуються квадратичною формою), розміщення неорієнтованих еліпсів, границі яких апроксимуються за допомогою дуг кіл відповідних радіусів, тощо. Слід відзначити, що одним із перспективних напрямів наукових досліджень є розробка моделей та методів оптимізації розміщення плоских неорієнтованих об'єктів з кусочно-нелінійними (нелінійними) границями у заданих областях, оскільки для апроксимації границь даних об'єктів може застосовуватися більш гнучкий інструментарій, наприклад, сплайни NURBS, B-сплайни, Акіма-сплайни тощо, при цьому збільшується коефіцієнт заповнення заданих областей за рахунок того, що об'єкти розміщення є неорієнтованими. Однією із задач, що сприятиме розвитку вказаного напряму, є задача оптимального розміщення плоских неорієнтованих геометричних об'єктів з кусочно-нелінійними границями у багатозв'язній області, дослідженню якої присвячено дану роботу.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Постановка задачі оптимізаційного розміщення плоских неорієнтованих геометричних об'єктів з кусочно-нелінійними границями представлена в роботі [1]. Завданню геометричної інформації для плоских неорієнтованих об'єктів з кусочно-нелінійними границями присвячено роботу [2]. У роботі [3] розроблено метод побудови поверхні дотику двох неорієнтованих об'єктів з кусочно-нелінійними границями. Розробку загальної математичної моделі оптимізації розміщення зазначених геометричних об'єктів у заданих областях, а також дослідження її особливостей наведено у [4].

Формулювання мети дослідження

В даній роботі необхідно розробити математичну модель оптимізації розміщення плоских неорієнтованих геометричних об'єктів із кусочно-нелінійними границями у багатозв'язній області, а також модифікований метод імітації відпалу для оптимізації розміщення даних об'єктів у зазначеній області.

Викладення основного матеріалу дослідження

Нехай у двовимірному просторі задано неорієнтовані об'єкти розміщення $S_i\left(x_i, y_i, \theta_i\right)$, $i=1,2,\ldots,N$, з кусочно-нелінійними границями так, як це наведено у роботі [2]. Границі даних об'єктів можуть також бути апроксимовані, наприклад, за допомогою Акіма-сплайнів [5].

Область розміщення $S_0\left(l,b\right)$ являє собою прямокутник, що заданий в глобальній системі координат, причому його довжина l є змінною (рис. 1). Даному прямокутнику належать області заборони $S_{0,r}\left(x_{0,r}, y_{0,r}\right)$, $r=1,2,\ldots,N_R$ (наприклад, дефекти матеріалу або об'єкти розміщення, що знаходяться на фіксованих місцях), які можуть бути задані аналогічно до об'єктів розміщення, але нумерація їх вершин здійснюється за годинниковою стрілкою.

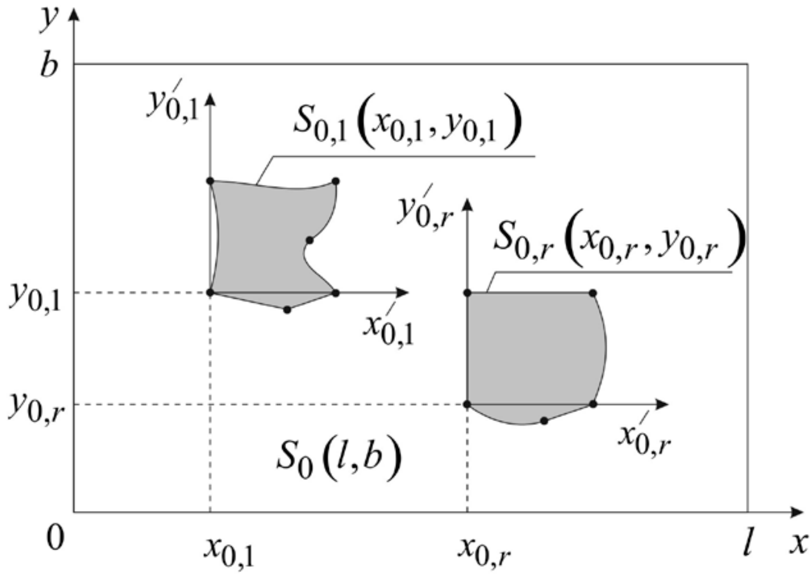

Рис. 1. Багатозв'язна область розміщення

Необхідно розмістити об'єкти $S_i\left(x_i, y_i, \theta_i\right)$, $i=1,\ldots,N$, у багатозв'язній області $S_0\left(l,b\right)$ таким чином, щоб довжина l була мінімальною і при цьому виконувались обмеження на:

– взаємний неперетин об'єктів $S_i\left(x_i, y_i, \theta_i\right)$ та $S_j\left(x_j, y_j, \theta_j\right)$, $i=1,\ldots,N$, $j=i+1,\ldots,N$;

– неперетин об'єктів $S_i\left(x_i, y_i, \theta_i\right)$ та областей заборони $S_{0,r}\left(x_{0,r}, y_{0,r}\right)$, $r=1,2,\ldots,N_R$.

– належність об'єктів $S_i\left(x_i, y_i, \theta_i\right)$ області $S_0\left(l,b\right)$.

Сформулюємо математичну модель оптимального розміщення плоских неорієнтованих об'єктів з кусочно-нелінійними границями у багатозв'язній області:

$$\min_W l\left(x_1, y_1, \theta_1, \ldots, x_N, y_N, \theta_N\right), \qquad (1)$$

де W :

$$\Phi_{ij}\left(x_i, y_i, \theta_i, x_j, y_j, \theta_j\right) \geq 0,\ i=1,\ldots,N-1,\ j=i+1,\ldots,N; \qquad (2)$$

$$\Phi_{kt}\left(x_k, y_k, \theta_k, x_{0,r}, y_{0,r}\right) \ge 0,\ k = 1,\ldots,N,\ r = 1,\ldots,N_R; \tag{3}$$

$$\Phi_{icS_0}\left(x_i, y_i, \theta_i, 0, 0\right) \ge 0,\ i = 1,\ldots,N. \tag{4}$$

В моделі (1)÷(4) вираз (1) являє собою цільову функцію задачі; вираз (2) – умову взаємного неперетину об'єктів розміщення; вираз (3) – умову неперетину об'єктів розміщення та областей заборони; вираз (4) – умову належності об'єктів області розміщення, причому cS_0 – доповнення S_0 до двовимірного простору.

Слід зазначити, що умови задачі (2) і (3) є, у загальному випадку, нелінійними, а умови (4) – лінійними. Усі обмеження аналітично подаються за допомогою Ф-функцій [6], а їх загальна кількість дорівнює $C_N^2 + N\left(N_R + 1\right)$. Для формалізації обмежень (2)÷(4) використовується метод, наведений в [3].

Для розв'язання задачі (1)÷(4) застосуємо метод, основу якого складає метод імітації відпалу. Цей метод являє собою алгоритмічний аналог фізичного процесу керованого охолодження і використовує упорядкований випадковий пошук нових станів системи з більш низькою температурою [7].

У процесі повільного керованого охолодження розплавленого матеріалу, який називається відпалом, кристалізація розплаву супроводжується глобальним зменшенням його енергії E, але при цьому припускаються ситуації, в яких вона може на деякий час зростати (зокрема, при підігріві розплаву для запобігання занадто швидкого його охолодження). Завдяки припустимості короткострокового підвищення енергетичного рівня, можливий вихід з пасток локальних мінімумів енергії, які виникають при реалізації процесу. Тільки зниження температури T до абсолютного нуля робить неможливим будь-яке самостійне підвищення енергетичного рівня розплаву.

Таким чином, для розробки модифікованого методу імітації відпалу необхідно визначитися із:

– функцією енергії E системи;

– функцію, яка описує зниження температури T протягом часу;

– функцію (правилом), що описує новий стан системи.

У нашому випадку цільова функція задачі (1) являє собою енергію системи, тобто:

$$E = l\left(X\right), \tag{5}$$

де $X = \left\{x_1, y_1, \theta_1, \ldots, x_N, y_N, \theta_N\right\}$ – поточний стан системи.

Що стосується вибору функції, яка описує зниження температури T протягом часу, то історично першою схемою імітації відпалу була схема больцманівського відпалу, в якій зміна температури має вигляд:

$$T = \frac{T_0}{\ln\left(1+t\right)}, \tag{6}$$

де T_0 – початкове значення температури; t – час, $t > 0$.

Для даної схеми доведено, що при достатньо великих значеннях T_0 та кількості кроків гарантується знаходження глобального мінімуму функції (5) [8].

Недоліком больцманівського відпалу є повільне зменшення температури T. Розв'язання даної задачі можливе шляхом заміни закону зміни температури (6), наприклад, на наступний:

$$T_m = q \cdot T_{m-1},\ m = 1, 2, \ldots \tag{7}$$

де температурний коефіцієнт q обирається, як правило, у межах 0,7÷0,99. Дана схема імітації відпалу дозволяє економити обчислювальні ресурси, але, при цьому, не гарантується знаходження глобального мінімуму функції (5).

Що стосується утворення нового стану системи, то, по-перше, здійснюється випадкова перестановка номерів об'єктів розміщення $\left\{i_1, i_2, \ldots, i_N\right\} \in \left\{1, \ldots, N\right\}$ і визначається поточний стан системи $X = \left\{x_1, y_1, \theta_1, \ldots, x_N, y_N, \theta_N\right\}$ шляхом послідовного розміщення об'єктів відповідно до перестановки їх номерів та з урахуванням обмежень (2)÷(4). На рис. 2 наведено приклад розміщення об'єкта $S_{i_2}\left(x_{i_2}, y_{i_2}, \theta_{i_2}\right)$ при деякому значенні параметра θ_{i_2}.

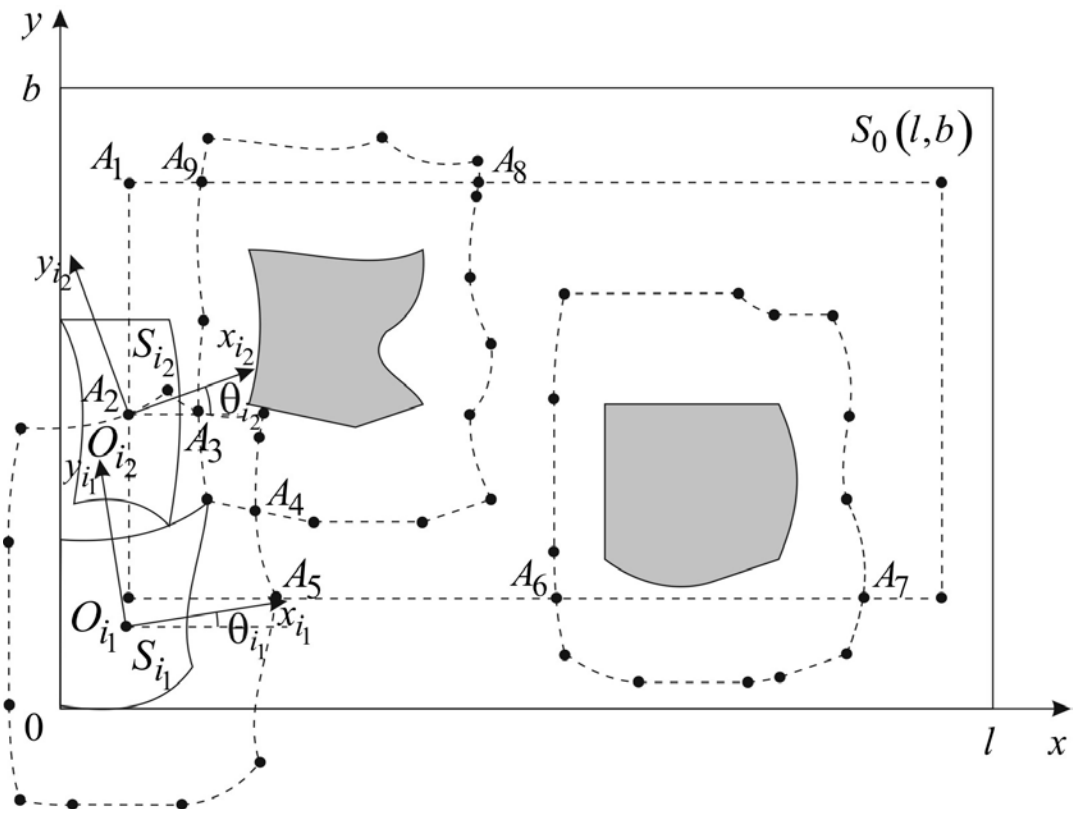

Рис. 2. Розміщення об'єкта $S_{i_2}\left(x_{i_2}, y_{i_2}, \theta_{i_2}\right)$

Так, у даному випадку припустимими точками для розміщення початку локальної системи координат об'єкта $S_{i_2}\left(x_{i_2}, y_{i_2}, \theta_{i_2}\right)$ є т. $A_1, \ldots, A_9$, які визначаються за допомогою систем рівнянь другого порядку (як лінійних, так і нелінійних). Дані системи рівнянь записуються шляхом перетворення відповідних нерівностей з (2)÷(4) у рівності. Очевидно, що з точки зору впливу на значення цільової функції (5) т. A_1 і A_2 є рівноцінними для розміщення початку локальної системи координат об'єкта $S_{i_2}\left(x_{i_2}, y_{i_2}, \theta_{i_2}\right)$. Разом з тим, виходячи з технологічних вимог, обираємо т. A_2. Аналогічно здійснюється розміщення інших об'єктів $S_{i_j}\left(x_{i_j}, y_{i_j}, \theta_{i_j}\right)$, $j = 3, \ldots, N$, при цьому обчислюється значення цільової функції $l(X)$ для поточного стану системи.

Для утворення нового стану системи $X^* = \left\{x_1^*, y_1^*, \theta_1^*, \ldots, x_N^*, y_N^*, \theta_N^*\right\}$ можна, наприклад, здійснювати перестановку номерів двох будь-яких об'єктів і проводити їх розміщення відповідно до нової перестановки з урахуванням обмежень (2)÷(4). Надалі обчислюється приріст енергії системи $\Delta E = l\left(X^*\right) - l(X)$. Якщо $\Delta E < 0$, то система здійснює перехід із стану X у стан X^*. У противному випадку перехід до стану X^* здійснюється із ймовірністю $p\left(\dfrac{\Delta E}{T}\right)$, яка обчислюється за допомогою виразу:

$$p\left(\frac{\Delta E}{T}\right) = e^{-\frac{\Delta E}{T}}. \tag{8}$$

Таким чином, обираючи початкове T_0 та кінцеве T_e значення температури T, яка знижується протягом часу, здійснюється оптимізація цільової функції задачі (5), при цьому генерація кожного наступного стану системи відбувається із урахуванням обмежень (2)÷(4).

Висновки

В даній роботі розроблено математичну модель оптимізації розміщення плоских неорієнтованих геометричних об’єктів з кусочно-нелінійними границями у багатозв’язній області та одержано оцінку кількості обмежень у даній моделі. На основі сформульованої математичної моделі було розроблено модифікований метод імітації відпалу для мінімізації цільової функції в задачі розміщення зазначених об’єктів у багатозв’язній області. Наведено приклад визначення припустимих точок розміщення локальної системи координат певного геометричного об’єкта. Подальші дослідження будуть спрямовані на розробку алгоритмічного та програмного забезпечення з метою комп’ютерної реалізації створеного модифікованого методу імітації відпалу для оптимізації розміщення плоских неорієнтованих геометричних об’єктів з кусочно-нелінійними границями у багатозв’язній області.

Список використаної літератури

1. Комяк В.М. Постановка задачі оптимального розміщення неорієнтованих плоских геометричних об’єктів з кусочно-нелінійними границями / В.М. Комяк, О.М. Соболь, Ю.С. Чапля // “Прикладна геометрія та інженерна графіка”. – К.: КНУБА, 2013. – Вип. 91С. 127-130.
2. Чапля Ю.С. Геометрична інформація в задачах оптимізації розміщення плоских геометричних об’єктів з кусочно-нелінійними границями / Ю.С. Чапля, А.В. Попова, О.М. Соболь // Матеріали ІІІ-ї Міжнародної науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених “Прикладна геометрія, дизайн та об’єкти інтелектуальної власності”. – К.: ДІЯ, 2014. – С. 214-219.
3. Соболь О.М. Спосіб побудови 0-рівня Ф-функції для плоских неорієнтованих геометричних об’єктів з кусочно-нелінійними границями / О.М. Соболь, Ю.С. Чапля // Сучасні проблеми моделювання: ‘ – Мелітополь: Вид-во МДПУ ім. Б. Хмельницького, 2014. – Вип. 3. – С. 119-125.
4. Комяк В.М. Математична модель оптимізації розміщення плоских неорієнтованих геометричних об’єктів з кусочно-нелінійними границями / В.М. Комяк, О.М. Соболь, Ю.С. Чапля // Вестник Херсонского национального технического университета. – Херсон: ХНТУ, 2014. – Вып. 3(50). – С. 300-305.
5. Мартинов Г.М. Проблемы использования сплайновой интерполяции в системах ЧПУ при обработке скульптурных поверхностей / Г.М. Мартинов, В.Л. Сосонкин // Автоматизация в промышленности. –2006 – №11. – С. 3-9.
6. Стоян Ю.Г. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования / Ю.Г. Стоян, С.В. Яковлев. – К.: Наукова думка, 1986. – 268 с.
7. Kirkpatrick S. Optimization by simulated annealing / S. Kirkpatrick, C.D. Gelatt, M.P. Vecchi // Science. – 1983, Vol. 220. – P. 671-680.
8. Савин А.Н. Применение алгоритма оптимизации методом имитации отжига на системах параллельных и распределенных вычислений / А.Н. Савин, Н.Е. Тимофеева // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика. – Саратов: СГУ, 2012. – Вып. 1 (12). – С. 110-116.