УДК519.83

І.В.МЕЛЬНИК, А.А. КСЕНОФОНТОВА
Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут"

ВИКОРИСТАННЯ ТЕОРІЇ ГРИ ДЛЯ ОПТИМАЛЬНОГО ВИРІШЕННЯ ПРОБЛЕМИ ПІД ЧАС СТВОРЕННЯ ТА РОЗГЛЯДУ ПИТАНЬ ЩОДО ЯКОСТІ ТА СОБІВАРТОСТІ ПРИЛАДІВ

В статті розглянутий метод максимінної та мінімаксної стратегії, який використовується для оптимізації якості та собівартості виробництва продукції. Результат застосування цього методу на практичних задачах електронної промисловості показав, що ігрові підходи допомагають формалізувати конкретні ситуації на підприємствах електронної промисловості та знайти компромісне рішення, яке задовольняє різні потреби. Зазвичай визначається, якщо не кращий, то в усякому разі не гірший варіант співвідношення стратегій гравців у даній ситуації. Розглянуті конкретні приклади задач із наявністю сідлової точки та без неї.

Ключові слова: теорія гри , мінімаксна та максимінна стратегія, сідлова точка.

И.В. МЕЛЬНИК, А.А. КСЕНОФОНТОВА
Национальный технический университет Украины "Киевский политехнический институт"

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТЕОРИИ ИГР ДЛЯ ОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ПРОБЛЕМЫ ПРИ СОЗДАНИИ И РАССМОТРЕНИЯ ВОПРОСОВ О КАЧЕСТВЕ И СЕБЕСТОИМОСТИ ПРИБОРОВ

В статье рассмотрен метод максиминной и минимаксной стратегии, который используется для оптимизации качества и себестоимости производства продукции. Результат применения этого метода в практических задачах электронной промышленности показал, что игровые подходы помогают формализовать конкретные ситуации на предприятиях электронной промышленности и найти компромиссное решение, которое удовлетворяет разные потребности. Обычно определяется если не лучший то, во всяком случае, не худший вариант соотношения стратегий игроков в данной ситуации. Рассмотрены конкретные примеры задач с наличием седловой точки и без нее.

Ключевые слова: теория игр, максиминная стратегия, минимаксная стратегия, седловая точка.

I.V. MELNYK, A.A. KSENOFONTOVA
National Technical University of Ukraine "Kiev Polytechnic Institute"

USING GAME THEORY FOR OPTIMAL SOLUTION TO THE PROBLEM OF THE CREATION AND CONSIDERING OF ISSUES RELATING TO THE QUALITY AND COST OF DEVICES

In the article the method maximin and minimax strategies for the optimization of the quality and cost of production is considered. The result of applying the method to practice problems showed that the game approaches help formalize specific situation and find a compromise solution that goes to meet the different needs of the game and take it if not better, then at least no worse option value strategies participants in this situation. The result of applying of this method for the practical tasks of electronic industry is shown, that the playing theory approaches helping to formulizing the real situating and finding the compromise solution, which are satisfied to different necessity of all partners. Usually the approach of playing theory allows finding other the best or not very worse variant to relations of the partners in real situations.

Keywords: Game theory, minimax strategy, maximin strategy, saddle point

Постановка проблеми

Сутність використання методів теорії ігор для вирішення задач виробництва полягає в тому, щоб формалізувати конкретні ситуації. Математично їх можна подати як гру двох або більше гравців, кожний з яких переслідує мету максимізувати свій виграш за рахунок іншого. В економіці теорія ігор може використовуватися для вибору оптимального рішення під час створення раціональних запасів сировини і матеріалів, напівфабрикатів, у разі розгляду питань щодо якості продукції та інших. За допомогою теорії ігор можливо розв'язати задачу максимізації середнього доходу підприємства від реалізації продукції за умови, що на неї впливатиме безліч випадкових факторів, оскільки асортимент виготовленої на підприємстві продукції різний. Отже, теорія ігор використовується для прийняття рішень в умовах конфліктних ситуцій. Використання відповідних математичних моделей в економіці дозволяє уникнути ризиків занадто великих витрат та банкрутства підприємств, банків та інших промислових, комерційних установ. Моделі теорії ігор використовуються для прогнозування економічного розвитку на державному рівні. Особливо важливим є використання теорії ігор у провідних галузях науково-технічного прогресу, де застосовуються сучасні наукові досягнення та нові технічні рішення, впровадження яких потребує вкладання великих коштів, що може привести до банкрутства підприємств. Одними із таких галузей є підприємства електроніки та обчислювальної техніки, для яких моделі розв’язку конфліктних ситуацій розглядаються у даній статті.

Основна частина

Метою дослідження є використання теорії гри, а саме максимінної та мінімаксної стратегії для оптимального розв’язання рішення під час створення та розгляду питань щодо якості та собівартості продукції.

Теорія ігор — це математичний апарат, що розглядає конфліктні ситуації, а також ситуації спільних дій кількох учасників. Завдання теорії ігор полягає у розробленні рекомендацій щодо раціональної поведінки учасників гри. Логічною основою теорії ігор є формалізація трьох понять, які входять в її визначення і є фундаментальними для всієї теорії [1]:

1) конфлікт;
2) прийняття рішення в конфлікті;
3) оптимальність прийнятого рішення.

Ці поняття розглядаються в теорії ігор у найширшому сенсі. Їхня формалізація відповідають змістовним уявленням про відповідні об'єкти.

Із багатьох критеріїв, які пропонуються теорією ігор для вибирання раціональних варіантів рішень, найпоширенішим є песимістичний критерій мінімаксу-максиміну [3], проте існують інші методи та засоби, що допомагають прийняти рішень в конфліктних ситуаціях [5]: системний аналіз, теорія масового обслуговування, лінійне і динамічне програмування, теорія керування запасами, мережене моделювання, експертні оцінки, вивчення й узагальнення досвіду, метод індукції тощо. Використання тих чи інших методів та засобів залежить, перш за все, від професійної компетентності, досвіду роботи, соціально-психологічних особливостей керівника та умов, за яких відбувається прийняття рішень.

Суть методу, який розглядається в даній роботі полягає в наступному. Нехай гравець *А* вибрав стратегію *Аі*, тоді у найгіршому разі він отримає виграш, що дорівнює min a_{ij}, тобто навіть тоді, якщо гравець *В* і знав би стратегію гравця *А*. Передбачаючи таку можливість, гравець *А* має вибрати таку стратегію, щоб максимізувати свій мінімальний виграш, тобто

$$a = \max_i \min_j a_{ij\,.} \qquad (1)$$

Така стратегія гравця *А* позначається A_{i0} і має назву максимінної, а величина гарантованого виграшу цього гравця називається нижньою ціною гри. Гравець *В,* який програє суми у розмірі елементів платіжної матриці, навпаки має вибрати стратегію, що мінімізує його максимально можливий програш за всіма варіантами дій гравця *А*. Стратегія гравця В позначається через $\mathrm{B_{j0}}$ і називається мінімаксною, а величина його програшу — верхньою ціною гри, тобто

$$\beta = \min_i \max_j a_{ij}\,. \qquad (2)$$

Отже, мета гравця *А* – максимізувати величину , а гравця *В* – мінімізувати її. Нехай тобто маємо матрицю *А*: де рядки відповідають стратегіям *Аі*, а стовпці – стратегіям *Bj*. Матриця А називається платіжною, а також матрицею гри. Елемент цієї матриці a_{ij} – це виграш гравця *А,* якщо він вибрав стратегію *Аі,* а гравець *В* – стратегію *Bj* [6;с.425].

	B_1	B_2	$\cdots$	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
A_m	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}

Рис. 1. Платіжна матриця

Оптимальний розв’язок цієї задачі досягається тоді, коли жодній стороні невигідно змінювати вибрану стратегію, оскільки її супротивник може у відповідь вибрати іншу стратегію, яка забезпечить йому кращий результат. Якщо

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij} = \beta = \min_i \max_j a_{ij} = \upsilon \tag{3}$$

то гра називається цілком визначеною. В такому разі виграш гравця *A* (програш гравця *B*) називається значенням гри і дорівнює елементу матриці a_{ij}. Цілком визначені ігри називаються іграми з сідловою точкою, а елемент платіжної матриці, значення якого дорівнює виграшу гравця *A* (програшу гравця *B*) і є сідловою точкою. В цій ситуації оптимальним рішенням гри для обох сторін є вибір лише однієї з можливих, так званих чистих стратегій — максимінної для гравця *A* та мінімаксної для гравця *B*, тобто якщо один із гравців притримується оптимальної стратегії, то для другого відхилення від його оптимальної стратегії не може бути вигідним.

Звісно, конфліктом можна вважати будь-яке явище, відносно якого можна казати про його учасників, про їхні дії, про результати явищ, до яких призводять ці дії, про сторони, які так чи інакше зацікавлені в таких наслідках, і про сутність цієї зацікавленості [4].

Ігрові підходи використовуються економістами як на макрорівні: у разі розробки моделей, в яких враховується зацікавленість різних ланок економіки, так і на рівні підприємства: для вибору оптимальних рішень під час створення запасів сировини, матеріалів, напівфабрикатів, підвищенні якості продукції, маркетинговій діяльності тощо. Перевагою теорії ігор є можливість розширення поняття оптимальності, включаючи, наприклад, компромісне рішення, яке йде на задоволення різних потреб у грі. У зв'язку з цим предметом даної статті є аналіз моделей конфліктних ситуацій на підприємствах електронної промисловості з використанням методів теорії ігор.

Результати дослідження

Розглянемо приклади розв'язку методом теорії ігор на конкретних задач підприємств електронної промисловості .

Приклад 1. Фірма виготовляє електронні прилади . Експертами виробничого відділу фірми розглядаються 3 типи приладів: *П-1, П-2, П-3. О*днак залежно від фінансування кожен тип може мати три якості: *Я-1, Я-2, Я-3* залежно від закупленої технології виробництва. Собівартість виготовлення приладів наведена в табл. №1.

Собівартість виготовлення устаткування, тис. ум.од.

Таблиця 1.

Прилади	***Якість***		
	Я-1	Я-2	Я-3
П-1	10	6	5
П-2	8	7	9
П-3	7	5	8

Конфліктна ситуація виникає в зв'язку з необхідністю вибрати той тип приладів та його якість , який буде затверджений економічним відділом фірми. З погляду виробництва найкращим є найдорожчий варіант, оскільки він дає змогу виробляти дорожчу та конкуренто спроможнішу продукцію, тоді як з погляду економічного відділу фірми найкращим є найдешевший варіант, який потребує найменшого відволікання коштів.

Завдання експертів полягає в тому, щоб запропонувати на розгляд фінансовому відділу такий тип приладів, який забезпечить якщо не кращий, то в усякому разі не гірший варіант співвідношення вартості та функціональних характеристик.

Якщо виробничий відділ запропонує виготовлення приладу типу П-1, то економічний відділ настоюватиме на придбанні технології, що дає Я-3, оскільки цей варіант найдешевший. Якщо зупинитись на приладі П-2, то скоріш за все затверджено буде Я-2, і нарешті для типу П-3 — також Я-2.

Зрозуміло, що з усіх можливих варіантів розвитку подій експертам виробничого відділу необхідно настоювати на варіанті впровадження у виробництво приладу типу П-2, оскільки це дає найбільше значення за реалізації найгірших умов — 7 тис. ум. од.

Наведені міркування ілюструють максимінну стратегію, отже:

$$\min_{i=1} a_{ij} = \min\{10;6;5\} = 5,$$

$$\min_{i=2} a_{ij} = \min\{8;7;9\} = 7,$$

$$\min_{i=3} a_{ij} = \min\{7;5;8\} = 5,$$

$\alpha = \max_j \min_i a_{ij} = \max\{5;7;5\} = 7$ — нижня ціна гри.

Якщо учасник відхилиться від своєї оптимальної (максимінної) стратегії і вибере першу чи третю, то зможе отримати виграш, що дорівнює лише 5.

Розглянемо тепер ситуацію з погляду спеціалістів економічного відділу. Виходячи з витрат на виробництво устаткування, вибір технології, що дає змогу виготовляти якість Я-1, може призвести до найбільших витрат у тому разі, коли вдасться затвердити випуск приладу типу П-1. Для технології виготовлення приладу з якістю Я-2 найбільші можливі витрати становлять 7 тис. ум. од. — для приладу П-2, а з якістю Я-3 — також для П-2. Для економістів найкращим є вибір технології, що забезпечує виготовлення приладів якості другого виду, оскільки за найгірших умов вона дає найменші витрати—7 тис.ум.од.

Останні міркування відповідають мінімаксній стратегії, що визначає верхню ціну гри.

$\max\limits_{j=1} a_{ij} = \max\{10;8;7\} = 10$,

$\max\limits_{j=2} a_{ij} = \max\{6;7;5\} = 7$,

$\max\limits_{j=3} a_{ij} = \max\{5;9;8\} = 9$,

$\beta = \min\limits_{i} \max\limits_{j} a_{ij} = \min\{10;7;9\} = 7$ - верхня ціна гри.

Якщо гравець відхилиться від своєї оптимальної (мінімаксної) стратегії, то це призведе до більших витрат. Якщо буде вибрано першу стратегію, можливий програш дорівнюватиме 10 тис. ум.од., а якщо буде вибрано третю стратегію, то можливий програш становитиме 9 тис. ум.од. Наведена гра є парною грою із сідловою точкою.

Приклад 2. Фірма випускає серію нових лазерів $(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6)$ для їх реалізації у наступному році. Залежно від фінансування (погодного стану, ринку тощо) виділено якості $(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5)$. Для кожного варіанта X_i $(i = \overline{1,6})$ серії та якості Y_j $(i = \overline{1,5})$ обчислені прибутки, які наведені у табл. 2.

Таблиця 2.

Серія	**Якості**				
	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5
	прибутки, тис. грн				
X_1	1,0	1,5	2,0	2,7	3,2
X_2	1,2	1,4	2,5	2,9	3,1
X_3	1,3	1,6	2,4	2,8	2,1
X_4	2,1	2,4	3,0	2,7	1,8
X_5	2,4	2,9	3,4	1,9	1,5
X_6	2,6	2,7	3,1	2,3	2,0

Необхідно вибрати найкращий варіант серії лазерів або комбінацію із виготовлених серій . Розв‘язати цю задачу можна, зокрема, за допомогою програм *Excel* і *Mathcad*, зведенням матричної гри до алгоритму лінійного програмування.

Маємо гру, платіжною матрицею якої є відповідні елементи вищенаведеної таблиці. Легко переконуємося, що домінуючих стратегій у цій грі немає.

Потім визначаємо:

α = *max* {*min*(l,0; 1,5; 2; 2,7; 3,2); *min*(l,2; 1,4; 2,5; 2,9; 3,l); *min*(l,3; 1,6; 2,4; 2,8; 2,l); *min* (2,1; 2,4; 3; 2,7; 1,8); *min*(2,4; 2,9; 3,4; 1,9; 1,5); *min*(2,6; 2,7; 3,1; 2,3; 2)} = *max*{l,0; 1,2; 1,3; 1,8; 1,5; 2} = 2,

а також

β = *min* (*max*(1,0; 1,2; 1,3; 2,1; 2,4; 2,6); *max*(l,5; 1,4; 1,6; 2,4; 2,9; 2,7*); max*(2;2,5;2,4;3;3,4;3,l); *max*(2,7;2,9;2,8;2,7;l,9;2,3); *max*(3,2;3,l;2,l;l,8;l,5;2)}= *min*{2,6;2,9;3,4;2,9;3,2} = 2,6.

Отже, α≠β, тобто немає сідлової точки, а це означає, що необхідно застосувати метод зведення гри до задачі лінійного програмування:

$$\min Z = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6$$

за умов:

$$\begin{cases} t_1 + 1{,}2t_2 + 1{,}3t_3 + 2{,}1t_4 + 2{,}4t_5 + 2{,}6t_6 \ge 1; \\ 1{,}5t_1 + 1{,}4t_2 + 1{,}6t_3 + 2{,}4t_4 + 2{,}9t_5 + 2{,}7t_6 \ge 1; \\ 2t_1 + 2{,}5t_2 + 2{,}4t_3 + 3t_4 + 3{,}4t_5 + 3{,}1t_6 \ge 1; \\ 2{,}7t_1 + 2{,}9t_2 + 2{,}8t_3 + 2{,}7t_4 + 1{,}9t_5 + 2{,}3t_6 \ge 1; \\ 3{,}2t_1 + 3{,}1t_2 + 2{,}1t_3 + 1{,}8t_4 + 1{,}5t_5 + 2t_6 \ge 1; \end{cases}$$

$t \ge 0 \quad (i = \overline{1,6})$

Знайдемо розв‘язок за допомогою команди minimize програми *Mathcad*

Розв‘яжемо задачу у матричному вигляді:

Початкові наближення:

$t_1 := 0 \quad t_2 := 0 \quad t_3 := 0 \quad t_4 := 0 \quad t_5 := 0 \quad t_6 := 0$

$$T(t) := \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \\ t_5 \\ t_6 \end{pmatrix}$$ -вектор змінних цільової функції $$C := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$ - коефіцієнти цільової функ

$Z(t) := C \cdot T(t)$ - цільова функція

$t_1 \geq 0 \quad t_2 \geq 0 \quad t_3 \geq 0 \quad t_4 \geq 0 \quad t_5 \geq 0 \quad t_6 \geq 0$

$$D := \begin{pmatrix} 1 & 1.2 & 1.3 & 2.1 & 2.4 & 2.6 \\ 1.5 & 1.4 & 1.6 & 2.4 & 2.9 & 2.7 \\ 2 & 2.5 & 2.4 & 3 & 3.4 & 3.1 \\ 2.7 & 2.9 & 2.8 & 2.7 & 1.9 & 2.3 \\ 3.2 & 3.1 & 2.1 & 1.8 & 1.5 & 2 \end{pmatrix}$$ - матриця коефіцієнтів лівих частин обмежень

$$B := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$ - вектор правих частин обмежень

Given

$D \cdot T(t) \geq B$

$T(t) \geq 0$

Розв'язок

$t := \text{minimize}(Z, t)$

$t^T = (0 \ \ 0 \ \ 0.11 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 0.34)$

$Z(t) = 0.442$

$\upsilon := \dfrac{1}{Z(t)} \qquad \upsilon = 2.264$ - ціна гри

Висновки

Отже, теорія ігор являє собою теорію математичних моделей прийняття оптимальних рішень в умовах конфлікту. Оскільки сторони, що беруть участь в більшості конфліктів, зацікавлені в тому, щоб приховати від супротивника власні наміри, прийняття рішень в умовах конфлікту, зазвичай, відбувається в умовах невизначеності.

Основними поняттями теорії ігор є поняття конфлікту, кроку (ходу), стратегії.

Завданням теорії ігор є розроблення рекомендацій гравцям, тобто визначення для них оптимальних стратегій. Під оптимальною стратегією розуміють таку стратегію, яка за умови багатократного повторення забезпечує гравцю максимально можливий середній виграш. Чисті стратегії – це пара стратегій, які перехрещуються в сідловій точці. Сідлова точка в цьому випадку і визначає ціну гри. Ігри, які не мають сідлової точки, на практиці зустрічаються частіше. Доведено, що і у цьому випадку рішення завжди є, але воно знаходиться в межах змішаних стратегій. Знайти рішення гри без сідлової точки означає визначення такої стратегії, яка передбачає використання кількох чистих стратегій. В іграх із сідловою точкою відхилення одного гравця від своєї оптимальної стратегії зменшує його виграш (в найкращому випадку виграш залишається незмінним).

Перевагою теорії ігор є можливість розширення поняття оптимальності, включаючи, наприклад, компромісне рішення, яке йде на задоволення різних потреб у грі. Актуальним є використання теорії гри в ринково-торгівельних відносинах, адже прогнозування можливого прибутку та витрат, дозволить отримати якщо не максимальний, то не найгірший результат від вкладених коштів.

Список використаної літератури

1. [Електронний ресурс] – Режим доступу: http://pidruchniki.com/13330607/menedzhment/modeli_teorii_igr.
2. [Електронний ресурс] – Режим доступу: http://economrisk.ru/princip-minimaksa-maksimina-reshenie-matrichnoj/1345-princip-minimaksa-maksimina-reshenie-matrichnoj-4.html.
3. [Електронний ресурс] – Режим доступу: http://studopedia.net/2_44275_teoriya-igr.html.
4. Шегда А.В. Ризики в підприємництві: оцінювання та управління / А.В. Шегда, М.В. Голованенко. – К.: Знання, 2008. – 271 с.
5. Наконечний С.І. Математичне програмування / С.І. Наконечний, С.С. Савіна. – К.: КНЕУ, 2003. – 452 с.