

УДК 539.3

П.А. ГЛУШИЧ, В.И. ГНИТЬКО, В.В. НАУМЕНКО, Е.А. СТРЕЛЬНИКОВА
Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЖИДКОСТИ В ЖЕСТКИХ ОБОЛОЧКАХ ВРАЩЕНИЯ

В работе предложен метод расчета собственных колебаний жидкости в оболочке вращения с жесткими стенками под действием силы тяжести. Предполагается, что жидкость идеальная, несжимаемая, а ее движение безвихревое. Метод решения основан на сведении задачи к системе сингулярных интегральных уравнений для определения потенциала скоростей. Численная реализация задачи основана на применении метода граничных элементов с применением специальных квадратур. Определены частоты и формы колебаний жидкости в жесткой конической оболочке.

Ключевые слова: свободные колебания, сила тяжести, метод граничных элементов.

П.О. ГЛУШИЧ, В.І. ГНИТЬКО, В.В. НАУМЕНКО, О.О. СТРЕЛЬНИКОВА
Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України

ВЛАСНІ КОЛИВАННЯ РІДИНИ В ЖОРСТКИХ ОБОЛОНКАХ ОБЕРТАННЯ

В роботі запропоновано метод розрахунку власних коливань рідини в оболонці обертання з жорсткими стінками під дією сили тяжіння. Припускається, що рідина є ідеальною та нестисливою, а її рух є безвихоревим. Метод засновано на редукції задачі до системи сингулярних інтегральних рівнянь для визначення потенціалу швидкостей. Чисельна реалізація задачі заснована на використанні методу граничних елементів з використанням спеціальних квадратур. Визначені частоти і форми коливань рідини в жорсткій конічній оболонці.

Ключові слова: вільні коливання, сила тяжіння, метод граничних елементів.

P. GLUSHYCH, V. GNITKO, V. NAUMENKO, E. STRELNIKOVA
A.N. Podgorny Institute of Mechanical Engineering Problems

LIQUID OWN VIBRATIONS IN RIGID SHELLS OF REVOLUTION

In this paper we present a method for evaluating the own frequencies and modes of the liquid in a shell of revolution with rigid walls under the force of gravity. The liquid is supposed to be an ideal and incompressible one and its flow induced by vibrations of the shell is irrotational. The method is based on reduction of the problem considered to the system of singular integral equations for the velocity potential. The numerical simulation is based on the boundary element method using the special quadratures.

Keywords: free vibrations, hydro-elastic interaction, finite and boundary element methods, different filling level.

Постановка проблеми

Проблема плесканий жидкости в контейнерах и баках находится в центре внимания многих исследователей на протяжении нескольких последних десятилетий. Феномен плесканий можно описать как интенсивное движение свободной поверхности жидкости, находящейся в резервуаре, под действием внезапно приложенной нагрузки. Плескания – это явление, наблюдающееся в широком диапазоне промышленных объектов: в контейнерах для хранения сжиженного газа, топливных баках ракет и самолетов, в резервуарах грузовых танкеров. Известно, что именно частично заполненные резервуары испытывают действие особенно сильных плесканий. Интенсивное движение жидкости может привести к высокому давлению на стенки резервуара, что в свою очередь ведет к разрушению конструкции или к потере устойчивости. Особенного внимания заслуживает изучение распределения давления на стенки резервуара, определение локальных максимумов, которые могут почти вдвое превышать аналогичные величины в незаполненном резервуаре [1]. В [2] определено давление на стенки круговых и призматических резервуаров, которые движутся с ускорением. В работах [3, 4] решалась плоская задача, и было установлено, что динамические характеристики существенно зависят от соотношения уровня заполнения и ширины контейнера. В [5] изучено распределение давления на стенки горизонтального цилиндрического резервуара сразу после действия ударной нагрузки при уровне заполнения жидкостью до 95%. В [6] проведено численное исследование для двумерного прямоугольного резервуара с жесткими стенками под действием горизонтального и вертикального ускорений. Эффекты вязкости исследованы в [7, 8], где показано, что вязкость проявляется при незначительных амплитудах и высоком уровне заполнения. Анализ большого количества исследований, посвященных проблемам плескания жидкости в резервуарах, проведен в основательных обзорах Р.А. Ибрагима [9, 10].

Как видим, в большинстве работ рассматриваются плоские задачи либо изучаются цилиндрические резервуары.

Данная работа посвящена определению частот и форм колебаний жидкости в произвольных оболочках вращения, в частности, конических резервуарах.

Анализ публикаций по теме исследований

Рассматривается задача о колебаниях жидкости в оболочке. Обозначим смоченную поверхность оболочки через S_1 , а свободную поверхность – S_0 . Пусть декартова система координат $Oxyz$ связана с оболочкой, свободная поверхность жидкости S_0 совпадает с плоскостью xOy в состоянии покоя.

Предполагается, что жидкость идеальная, несжимаемая, а ее движение, начавшееся из состояния покоя, является безвихревым. В этих условиях существует потенциал скоростей жидкости Φ

$$V_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}; V_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}; V_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z},$$

удовлетворяющий уравнению Лапласа. Величину давления p на стенки оболочки определяем из линеаризованного интеграла Коши-Лагранжа по формуле

$$p = -\rho_l \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + gz \right) + p_0,$$

в которой Φ – потенциал скоростей, g – ускорение свободного падения, z – координата точки жидкости, отсчитываемая в вертикальном направлении, ρ_l – плотность жидкости, p_0 – атмосферное давление.

На свободной поверхности жидкости должны быть выполнены следующие условия:

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|_{S_0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}; \quad p - p_0|_{S_0} = 0,$$

где функция ζ описывает форму и положение свободной поверхности.

Таким образом, для потенциала скоростей имеем следующую краевую задачу

$$\nabla^2 \Phi = 0; \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|_{S_1} = 0; \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|_{S_0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}; \quad p - p_0|_{S_0} = 0; \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} + gz \right|_{S_0} = 0.$$

Здесь w – нормальное перемещение упругой оболочки, $\zeta = \zeta(t, x, y, z)$ – функция, описывающая поведение свободной поверхности.

Требуется определить частоты и формы свободных колебаний жидкости в зависимости от уровня заполнения с учетом действия гравитационной силы.

Основная часть

Представим потенциал Φ в виде

$$\Phi = \sum_{k=1}^M \dot{d}_k \varphi_k. \quad (1)$$

Для функций φ_{2k} имеем следующие краевые задачи:

$$\nabla^2 \varphi_k = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} \right|_{S_1} = 0, \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} \right|_{S_0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}; \quad \frac{\partial \varphi_k}{\partial t} + g\zeta = 0. \quad (3)$$

Продифференцируем второе из соотношений (3) по t и подставим в полученное равенство выражение для $\frac{\partial \zeta}{\partial t}$. Далее представим функции φ_{2k} в виде $\varphi_{2k}(t, x, y, z) = e^{i\chi_k t} \varphi_{2k}(x, y, z)$. Приходим к проблеме собственных значений, при этом на свободной поверхности будет выполнено равенство

$$\frac{\partial \varphi_{2k}}{\partial n} = \frac{\chi_k^2}{g} \varphi_{2k}. \quad (4)$$

Для уравнения свободной поверхности получим выражение

$$\zeta = \sum_{k=1}^M d_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial n}. \quad (5)$$

В цилиндрической системе координат искомые базисные функции допускают представления

$$\varphi_k(r, z, \theta) = \varphi_k(r, z) \cos \alpha \theta. \quad (6)$$

Здесь α – номер гармоники. Таким образом, отдельно рассматриваются частоты и формы свободных колебаний для различных α .

Представим φ в виде суммы потенциалов простого и двойного слоя

$$2\pi\varphi(P_0) = \iint_S \frac{\partial\varphi}{\partial n} \frac{1}{|P-P_0|} dS - \iint_S \varphi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|P-P_0|} dS. \quad (7)$$

Здесь предполагается, что $S = S_1 \cup S_0$; точки P и P_0 принадлежат поверхности S .

Величина $|P-P_0|$ представляет собой декартово расстояние между точками P и P_0 .

Удовлетворив граничным условиям (2),(3), приходим к системе интегральных уравнений в виде:

$$\begin{cases} 2\pi\varphi_1 + \iint_{S_1} \varphi_1 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS_1 - \frac{\kappa^2}{g} \iint_{S_0} \varphi_0 \frac{1}{r} dS_0 + \iint_{S_0} \varphi_0 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) dS_0 = 0, \\ - \iint_{S_1} \varphi_1 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS_1 - 2\pi\varphi_0 + \frac{\kappa^2}{g} \iint_{S_0} \varphi_0 \frac{1}{r} dS_0 = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Решение системы (8) ищем в виде (6).

Пусть Γ – образующая поверхности S_1 . В формулах (8) на поверхности S_1 будет $r = r(z)$.

Устанавливаем, что система (8) принимает вид

$$\begin{aligned} 2\pi\varphi(z_0) + \int_{\Gamma} \varphi(z) Q(z, z_0) r(z) d\Gamma - \int_0^R q(\rho) \Psi(P, P_0) \rho d\rho &= \int_{\Gamma} w(z) \Psi(P, P_0) r(z) d\Gamma_1; P_0 \in S_1; \\ \int_{\Gamma} \varphi(z) Q(z, z_0) r(z) d\Gamma - \int_0^R q(\rho) \Psi(P, P_0) \rho d\rho &= \int_{\Gamma} w(z) \Psi(P, P_0) r(z) d\Gamma_1; P_0 \in S_0. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь

$$Q(z, z_0) = \frac{4}{\sqrt{a+b}} \left\{ \frac{1}{2r} \left[\frac{r^2 - r_0^2 + (z_0 - z)^2}{a-b} E_\alpha(k) - F_\alpha(k) \right] n_r + \frac{z_0 - z}{a-b} E_\alpha(k) n_z \right\};$$

$$\Psi(P, P_0) = \frac{4}{\sqrt{a+b}} F_\alpha(k).$$

Отметим, что величины a и b вычисляются на соответствующих поверхностях. При вычислении по S_0 будем иметь (здесь мы вводим полярные координаты)

$$a = \rho^2 + \rho_0^2 + (z^* - z_0)^2; \quad b = 2\rho\rho_0.$$

Здесь z^* – координата свободной поверхности.

Итак, для каждого $w = w(r, z) \cos \alpha\theta$ имеем систему интегральных уравнений вида (9).

Решение систем сингулярных интегральных уравнений осуществляется методом граничных элементов с постоянной аппроксимацией плотности [11]. Внутренние интегралы в (9) представляют собой эллиптические интегралы первого и второго рода. Для вычисления эллиптических интегралов второго рода, не имеющих особенностей, используются стандартные квадратурные формулы Гаусса. Вычисление эллиптических интегралов первого рода осуществляется с привлечением среднего арифметико-геометрического значения $AGM(a, b)$ (см. [12]). Имеет место характеристическое свойство $AGM(a, b)$

$$a_0 = a; \quad b_0 = b; \quad a_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}; \quad b_1 = \sqrt{a_0 b_0}; \dots a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}; \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}; \dots$$

$$AGM(a, b) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Это приводит к чрезвычайно эффективному методу вычисления эллиптических интегралов первого рода. Сходимость $\varepsilon = |a_n - b_n| < 10^{-8}$ достигается уже при $n = 6$.

Отметим, что ядра в интегральных операторах (9) имеют логарифмическую особенность [11]. Для вычисления таких интегралов неприменимы стандартные квадратурные формулы, поскольку подынтегральные функции резко меняются внутри элемента. Для их вычисления в данной работе применены специальные квадратурные формулы Гаусса [13].

Численные результаты

Рассмотрена задача о собственных колебаниях жидкости в коническом баке (рис.1). Аналитические значения собственных частоты и формы колебаний жидкости определяются формулами, полученными в [14]. Численно собственные частоты колебаний жидкости χ^2/g в конической оболочке определены по методике, описанной выше.

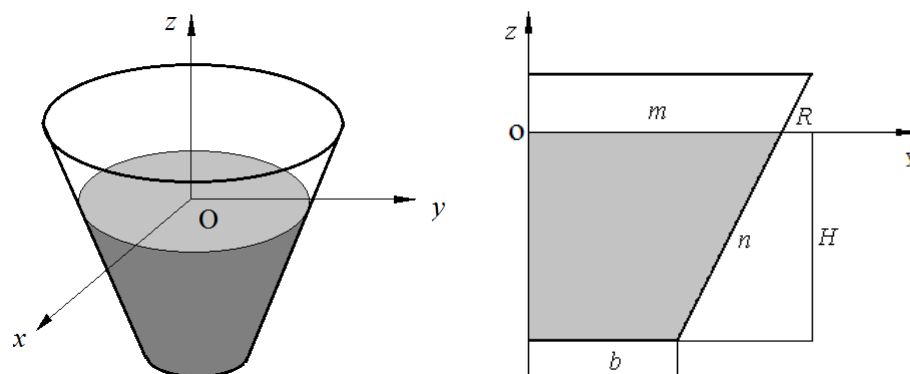


Рис. 1. Конический бак с жидкостью

При решении задачи задавалась сетка из n граничных элементов на меридиане оболочки и m граничных элементов на свободной поверхности жидкости. В табл.1 приведены результаты расчетов первых двух собственных чисел χ^2/g при $\bar{H} = H/R$, $b = R/2$ для $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$ в зависимости от параметров n и m .

Таблица 1.

Сходимость собственных чисел в зависимости от разбиения

$n + m$	$\alpha=0$		$\alpha=1$	
	1	2	1	2
10+10	3.54	6.93	1.39	5.15
20+20	3.50	6.78	1.38	5.05
30+30	3.48	6.74	1.37	5.02
40+40	3.47	6.71	1.37	5.01
	3.46	6.70	1.36	4.97

Хорошее согласование и сходимость результатов свидетельствует о достоверности полученных данных, эффективности метода и алгоритма решения задачи.

На рис. 2 приведены собственные формы колебаний свободной поверхности жидкости, соответствующие двум низшим частотным параметрам.

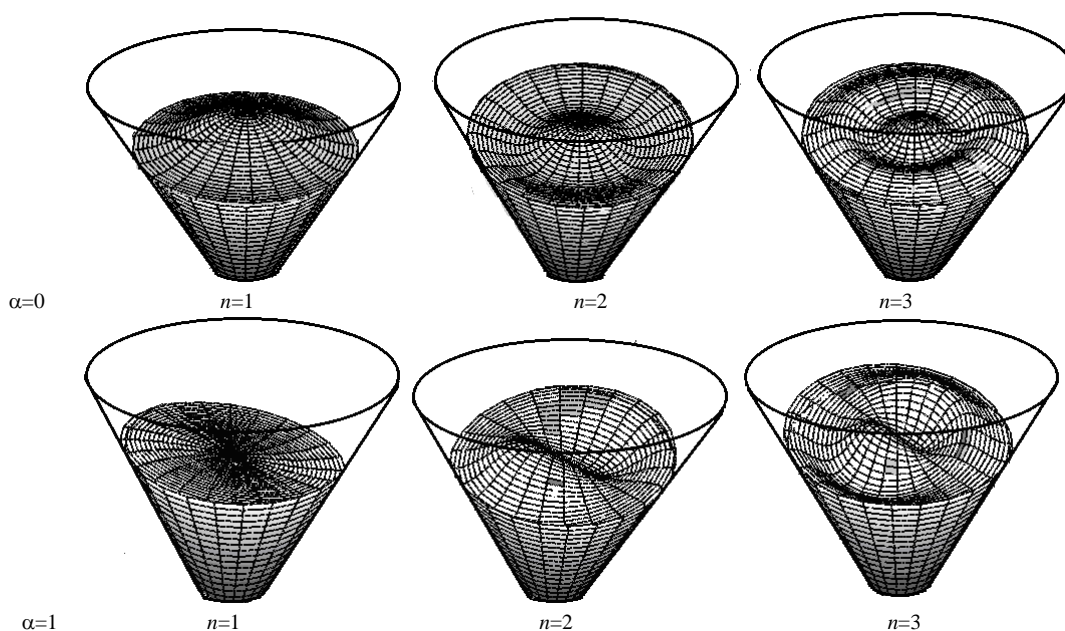


Рис.2. Формы колебаний свободной поверхности жидкости в коническом баке.

Низшая частота собственных колебаний жидкости в коническом резервуаре отвечает $\alpha=1$; $n=1$.

Выводы и перспективы дальнейших исследований

Построена математическая модель и разработаны теоретические основы численного метода анализа колебаний жидкости в жестком резервуаре, имеющем форму оболочки вращения. Разработан метод численного определения собственных частот и форм колебаний идеальной несжимаемой жидкости в жестком резервуаре. Метод основан на применении интегральных уравнений для определения потенциала жидкости. При численной дискретизации использован метод граничных элементов. Построенные формы колебаний будут в дальнейшем использованы как базисная система для решения задачи о вынужденных колебаниях упругих резервуаров, частично заполненных жидкостью.

Список использованной литературы

1. Khezzar L. Water Sloshing in Rectangular Tanks – An Experimental Investigation Numerical Simulation / L. Khezzar, A.C. Seibi, A. Goharzadeh // International Journal of Engineering. – 2010. – Vol. 3. – № 2. – P. 174-184.
2. Chwang A.T. Nonlinear Impulsive Force on an Accelerating Container / A.T. Chwang, K.H. Wang // J. of Fluids Eng. – 1984. – Vol. 106. – P. 233-240.
3. Popov G. Liquid Sloshing In Rectangular Road Containers / G. Popov, S. Sankar, T.S. Sankar, G.H. Vatitas // Computers Fluids. – 1992. – Vol. 21. – № 4. – P. 551-569.
4. Popov G. Dynamics of liquid sloshing in horizontal cylindrical road containers / G. Popov, S. Sankar, T.S. Sankar, G.H. Vatitas // Journal of Mechanical Engineering Science. – 1993. – Vol. 207. – P. 399-406.
5. Ye Z. Fluid Pressures in Partially Liquid-Filled Horizontal Cylindrical Vessels Undergoing Impact Acceleration / Z. Ye, A.M. Birk // Journal of Pressure Vessel Technology. – 1994. – Vol. 116. – № 4. – P. 449-459.
6. Chen B.F. Complete 2D and Fully Nonlinear Analysis of ideal fluid in tanks / B.F. Chen, H.W. Chiang // Journal of Engineering Mechanics. – 1999. Vol. 125. – P. 70-78.
7. Faltinsen O.M. Sloshing / O.M. Faltinsen, O.F. Rognebakke // NAV2000: International Conference on Ship and Ship Research. – Venice, 2000.
8. Bass R.L. Modeling criteria for scaled LNG sloshing experiments / R.L. Bass, J.E.B. Bowles, R.W. Trundell, J. Navickas, J.C. Peck, N. Yoshimura, S. Endo, B.F.M. Pots // Transactions of the American Society of Mechanical Engineers. 1985. – Vol. 107. – P. 272-280.
9. Ibrahim R.A. Recent Advances In Liquid Sloshing Dynamics / R.A. Ibrahim, V.N. Pilipchuck, T. Ikeda // Applied Mechanics Reviews. – 2001. – Vol. 54. – № 2. – P. 133-199.
10. Ibrahim R.A. Liquid Sloshing Dynamics / R.A. Ibrahim. – New York: Cambridge University Press, 2005. – 970 p.
11. Ventsel E. Free vibrations of shells of revolution filled with a fluid. / E. Ventsel, V. Naumenko, E. Strelnikova, E. Yeseleva // Engineering analysis with boundary elements. – 2010. – Vol.34. – P. 856-862.
12. David A. Cox. The Arithmetic-Geometric Mean of Gauss / A. Cox. David // L'Enseignement Mathématique. – 1984. – Vol. 30. – P. 275-330.
13. Stroud A.H. Gaussian Quadrature Formulas / A.H. Stroud, D. Secrest // Prentice-Hall, Englewood, NJ, Cliffs, 1966. – 374 p.
14. Луковский И.А. Введение в нелинейную динамику твердого тела с полостями, содержащими жидкость / И.А. Луковский. – Киев: Наукова думка, 1990. – 296 с.