УДК 539.3

И.П. БОКОВ, Е.А. СТРЕЛЬНИКОВА
Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАНУ

ДВУМЕРНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН

Двумерные уравнений теории упругости для изотропных пластин получены с использованием метода аппроксимации перемещений, напряжений и деформаций рядами Фурье по полиномам Лежандра от поперечной координаты. Этот подход позволяет учесть поперечные касательные и нормальные напряжения. На основе построенных с помощью этого подхода уравнений для изотропных пластин разработана методика расчета при действии сосредоточенных силовых воздействий. Фундаментальное решение полученных уравнений найдено с помощью двумерного интегрального преобразования Фурье и методики обращения, построенной с помощью специальной G-функции.

Ключевые слова: внутренние силовые факторы, обобщенная теория, уравнения статики, силовые воздействия, изотропные пластины, специальная G-функция.

І.П. БОКОВ, О.О. СТРЕЛЬНІКОВА
Інститут проблем машинобудування ім. А.Н. Підгорного НАНУ

ДВОВИМІРНІ РІВНЯННЯ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ІЗОТРОПНИХ ПЛАСТИН

Двовимірні рівняння теорії пружності для ізотропних пластин отримано з використанням методу апроксимації переміщень, напруг і деформацій рядами Фур'є за поліномами Лежандра від поперечної координати. Цей підхід дозволяє врахувати поперечні дотичні і нормальні напруги. На основі побудованих за допомогою цього підходу рівнянь для ізотропних пластин розроблена методика їх розрахунку при дії зосереджених силових впливів. Фундаментальне рішення отриманих рівнянь знайдено за допомогою двовимірного інтегрального перетворення Фур'є і методики звернення, побудованої за допомогою спеціальної G-функції.

Ключові слова: внутрішні силові фактори, узагальнена теорія, рівняння статики, силові дії, ізотропні пластини, спеціальна G-функція.

I.P. BOKOV, E.A. STRELNIKOVA
A.N. Podgorny Institute of Mechanical Engineering Problems NAS of Ukraine

2D EQUATIONS OF THE ELASTICITY THEORY FOR ISOTROPIC PLATES

The displacements, stresses and strains approximations via Fourier series in Legendre polynomials on the transverse coordinate method were used to derive the equations of two-dimensional theory of elasticity for isotropic plates. This approach allows us to take into account the transverse shear and normal stresses. On the basis of this approach with the help of equations for isotropic plates the method was developed to their calculation under the point force. The fundamental solution of the equations using a two-dimensional Fourier integral and methods of treatment, obtained by using a special G-function has been found.

Key words: internal force factors, generalized theory, the equations of statics, impact strength, isotropic plates, the special G-function.

Постановка проблемы

В современной технике широко используются инженерные сооружения из тонкостенных элементов конструкций, подверженных значительным силовым воздействиям. Дополнительные трудности в расчет тонкостенных элементов конструкций вносит сосредоточенный характер силовых воздействий.

Классическая теория Кирхгофа-Лява удовлетворительно описывает напряженно-деформированное состояние (НДС) сравнительно тонких изотропных пластин, но не учитывает явления, обусловленные сдвигами и обжатием. С другой стороны, решение задач теории упругости в трехмерной постановке приводит к значительным математическим трудностям. Поэтому вопрос построения уточненных теорий тесно связан с проблемой приведения трехмерных задач к двумерным.

Таким образом, исследование на базе уточненных теорий силового состояния изотропных пластин при действии сосредоточенных силовых воздействий является актуальным и важным научно-техническим заданием.

Для приведения трехмерной задачи для изотропных пластин к двумерной используется метод разложения искомых функций в ряды по полиномам Лежандра от нормальной координаты. Этот подход позволяет учесть поперечные касательные и нормальные напряжения. На основе полученных с помощью этого подхода уравнений для изотропных пластин разработана методика их расчета при действии сосредоточенных силовых воздействий.

Анализ последних исследований и публикаций

Разработке методов построения фундаментальных решений (решений, соответствующих сосредоточенным воздействиям) уравнений теории упругих тонких пластин и оболочек посвящено большое количество отечественных и зарубежных работ. Постановки задач, методы их решения и ряд конкретных решений содержатся в монографиях и научных статьях С.А. Амбарцумяна [1], А.Л. Гольденвейзера [2], S. Lukasiewicz [3], а также в ряде обзоров В.М. Даревского [4], Ю.П. Жигалко [5] и других.

Для построения уравнений равновесия изотропных пластин В.В. Понятовским [6] используется метод (предложенный ранее Е. Рейсснером для случая линейного распределения напряжений по толщине пластины), согласно которому тангенциальные компоненты напряжений представляются в виде рядов по полиномам Лежандра от толщинной координаты, а поперечные компоненты напряжений определяются из уравнений равновесия путем интегрирования их по нормальной координате с учетом граничных условий на лицевых плоскостях. После этого используется вариационный принцип Кастильяно. Из вариационного уравнения следуют уравнения совместимости и соответствующие граничные условия. Предложенный им метод применяется для вывода уравнений равновесия анизотропных [7] и трансверсально – изотропных [8] пластин. Здесь же указывается способ интегрирования найденных уравнений.

Цель исследования

Рассматривается изотропная пластина толщины $2h$ в прямоугольной декартовой системе координат x, y, z.

Пусть на пластину действует сосредоточенная сила $\vec{F}$, приложенная в начале координат (особой точке). Сосредоточенную силу можно представлять себе как некоторую абстракцию (конечную по величине силу), действующую на малый участок поверхности [9]).

При решении задач о действии сосредоточенных сил искомое НДС. считаем локальным, т.е. не распространяющимся до линии внешнего контура пластины. Поэтому пластину считаем бесконечной и предполагаем, что искомые компоненты НДС стремятся к нулю на бесконечности. Справедливость данного предположения проверяется после решения задачи.

Математическая формулировка задачи содержит полную систему уравнений теории упругости без учёта граничных условий на краях реальной пластины. Система уравнений НДС. изотропных пластин на базе теории С.П. Тимошенко, описывающая НДС при изгибе, состоит из [10]:

• геометрических соотношений

$$e_{x1} = h\frac{\partial \gamma_x}{\partial x}, \quad e_{xy1} = h\left(\frac{\partial \gamma_x}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_y}{\partial x}\right), \; e_{xz0} - \frac{e_{xz2}}{5} = \gamma_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \qquad (x \to y). \tag{1}$$

• соотношений упругости

$$M_x = D\left(e_{x1} + \nu e_{y1}\right), \quad M_y = D\left(e_{y1} + \nu e_{x1}\right), \quad H = \frac{1-\nu}{2} De_{xy1}, \tag{2}$$

$$Q_x = \Lambda\left(e_{xz0} - \frac{e_{xz2}}{5}\right) \quad (x \to y),$$

где $D = \dfrac{2h^2}{3}\dfrac{E}{1-\nu^2}$, $\Lambda = \dfrac{5hG}{3}$.

• уравнений равновесия

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} - Q_x + m_x = 0, \quad \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial x} - Q_y + m_y = 0, \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q_z = 0 \tag{3}$$

Чтобы найти фундаментальное решение системы (1)-(3), компоненты вектора объёмной силы в формулах (3) следует взять в виде

$$m_x(x, y) = h^2 m_x^* \delta(x, y), m_y(x, y) = h^2 m_y^* \delta(x, y), \; q_z(x, y) = h^2 q_z^* \delta(x, y) \; (x \to y), \tag{4}$$

где $m_x^*, m_y^*, q_z^* = const$, $\delta(x, y)$– двумерная дельта-функция Дирака [11].

Изложение основного материала исследования

Подставив геометрические соотношения (1) в соотношения упругости (2) и перейдя в безразмерную систему координат $x_1 = x/h$, $x_2 = y/h$, $x_3 = z/h$, получим

$$M_1 = D_0\left(\frac{\partial\gamma_1}{\partial x_1} + \nu\frac{\partial\gamma_2}{\partial x_2}\right), \qquad M_2 = D_0\left(\frac{\partial\gamma_2}{\partial x_2} + \nu\frac{\partial\gamma_1}{\partial x_1}\right),$$

$$H = \frac{1-\nu}{2}D_0\left(\frac{\partial\gamma_1}{\partial x_2} + \nu\frac{\partial\gamma_2}{\partial x_1}\right), \tag{5}$$

$$Q_1 = \Lambda_0\left(\gamma_1 + \frac{\partial w_0}{\partial x_1}\right), \quad Q_2 = \Lambda_0\left(\gamma_2 + \frac{\partial w_0}{\partial x_2}\right),$$

где $D_0 = \dfrac{D}{Eh^2} = \dfrac{2}{3}\dfrac{1}{1-\nu^2}$, $\Lambda_0 = \dfrac{5G}{3E}$.

Изгибающие и крутящий моменты определены в отношении к величине Eh^2, а перерезывающие силы – в отношении к величине Eh.

Переходя к безразмерным координатам, получим

$$\frac{\partial M_1}{\partial x_1} + \frac{\partial H}{\partial x_2} - Q_1 + m_1 = 0, \qquad \frac{\partial M_2}{\partial x_2} + \frac{\partial H}{\partial x_1} - Q_2 + m_2 = 0, \qquad \frac{\partial Q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} + q_3 = 0, \tag{6}$$

где $m_1 = m_1^*\delta(x_1, x_2)$, $\quad m_2 = m_2^*\delta(x_1, x_2)$, $\quad q_3 = q_3^*\delta(x_1, x_2)$.

Решив систему, получаем трансформанты обобщенных перемещений:

$$\tilde{\gamma}_1 = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{m_1^*}{D_0}\frac{\xi_1^2}{p^4} + 3(1+\nu)m_1^*\frac{\xi_2^2}{p^2\left(p^2+2{,}5\right)} + \frac{q_3^*}{D_0}\frac{i\xi_1}{p^4} + \frac{m_2^*}{D_0}\frac{\xi_1\xi_2}{p^4} - 3(1+\nu)m_2^*\frac{\xi_1\xi_2}{p^2\left(p^2+2{,}5\right)}\right],$$

$$\tilde{\gamma}_2 = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{m_2^*}{D_0}\frac{\xi_2^2}{p^4} + 3(1+\nu)m_2^*\frac{\xi_1^2}{p^2\left(p^2+2{,}5\right)} + \frac{q_3^*}{D_0}\frac{i\xi_2}{p^4} + \frac{m_1^*}{D_0}\frac{\xi_1\xi_2}{p^4} - 3(1+\nu)m_1^*\frac{\xi_1\xi_2}{p^2\left(p^2+2{,}5\right)}\right],$$

$$\tilde{w}_0 = \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{m_1^*}{D_0}\frac{i\xi_1}{p^4} - \frac{m_2^*}{D_0}\frac{i\xi_2}{p^4} + \frac{q_3^*}{D_0}\frac{1}{p^4} + \frac{q_3^*}{\Lambda_0}\frac{1}{p^4}\right], \tag{7}$$

где $p^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2$; (ξ_1, ξ_2) – координаты точки в пространстве трансформант.

Применим преобразование Фурье к уравнениям закона Гука (5):

$$\tilde{M}_1 = -D_0\left(i\xi_1\tilde{\gamma}_1 + i\nu\xi_2\tilde{\gamma}_2\right), \qquad \tilde{M}_2 = -D_0\left(i\xi_2\tilde{\gamma}_2 + i\nu\xi_1\tilde{\gamma}_1\right),$$

$$\tilde{H} = \frac{1-\nu}{2}D_0\left(i\xi_2\tilde{\gamma}_1 + i\xi_1\tilde{\gamma}_2\right), \tag{8}$$

$$\tilde{Q}_1 = \Lambda_0\left(\tilde{\gamma}_1 - i\xi_1\tilde{w}_0\right), \quad \tilde{Q}_2 = \Lambda_0\left(\tilde{\gamma}_2 - i\xi_2\tilde{w}_0\right).$$

Подставим ранее полученные трансформанты обобщенных перемещений (7) в трансформанты крутящего момента и перерезывающих сил (8):

$$\tilde{H} = -\frac{1}{2\pi}\left[(1-\nu)m_1^*\frac{i\xi_1^2\xi_2}{p^4} + m_1^*\frac{i\xi_2^3}{p^2\left(p^2+2{,}5\right)} - (1-\nu)q_3^*\frac{\xi_1\xi_2}{p^4} + \right.$$

$$\left. + (1-\nu)m_2^*\frac{i\xi_1\xi_2^2}{p^4} - m_2^*\frac{i\xi_1\xi_2^2}{p^2\left(p^2+2{,}5\right)} + m_2^*\frac{i\xi_1^3}{p^2\left(p^2+2{,}5\right)} - m_1^*\frac{i\xi_1^2\xi_2}{p^2\left(p^2+2{,}5\right)}\right], \tag{9}$$

$$\tilde{Q}_1 = \frac{2{,}5}{2\pi}\left[m_1^*\frac{\xi_2^2}{p^2\left(p^2+2{,}5\right)} - m_2^*\frac{\xi_1\xi_2}{p^2\left(p^2+2{,}5\right)}\right] - \frac{q_3^*}{2\pi}\frac{i\xi_1}{p^2},$$

$$\tilde{Q}_2 = \frac{2{,}5}{2\pi}\left[m_2^*\frac{\xi_1^2}{p^2\left(p^2+2{,}5\right)} - m_1^*\frac{\xi_1\xi_2}{p^2\left(p^2+2{,}5\right)}\right] - \frac{q_3^*}{2\pi}\frac{i\xi_2}{p^2}.$$

Обозначим

$$\tilde{\Phi}_1(\xi_1, \xi_2) = \frac{i\xi_1}{p^2}, \qquad \tilde{\Phi}_2(\xi_1, \xi_2) = \frac{\xi_1^2}{p^2\left(p^2+2{,}5\right)}, \qquad \tilde{\Phi}_2(\xi_1, \xi_2) = \frac{\xi_1\xi_2}{p^2\left(p^2+2{,}5\right)},$$

$$\tilde{\Phi}_4(\xi_1,\xi_2)=\frac{i\xi_1^2\xi_2}{p^4},\quad \tilde{\Phi}_5(\xi_1,\xi_2)=\frac{i\xi_1^3}{p^2(p^2+2{,}5)},\quad \tilde{\Phi}_6(\xi_1,\xi_2)=\frac{\xi_1\xi_2}{p^4},\tag{10}$$

$$\tilde{\Phi}_7(\xi_1,\xi_2)=\frac{i\xi_1^2\xi_2}{p^2(p^2+2{,}5)}.$$

Тогда крутящий момент и перерезывающие силы в пространстве трансформант запишутся так

$$\tilde{H}=-\frac{1}{2\pi}\Big[(1-\nu)m_1^*\tilde{\Phi}_4(\xi_1,\xi_2)+m_1^*\tilde{\Phi}_5(\xi_2,\xi_1)-(1-\nu)q_3^*\tilde{\Phi}_6(\xi_1,\xi_2)+$$
$$+(1-\nu)m_2^*\tilde{\Phi}_4(\xi_2,\xi_1)-m_2^*\tilde{\Phi}_7(\xi_2,\xi_1)+m_2^*\tilde{\Phi}_5(\xi_1,\xi_2)-m_1^*\tilde{\Phi}_7(\xi_1,\xi_2)\Big],$$

$$\tilde{Q}_1=\frac{2{,}5}{2\pi}\left[m_1^*\tilde{\Phi}_2(\xi_2,\xi_1)-m_2^*\tilde{\Phi}_3(\xi_1,\xi_2)\right]-\frac{q_3^*}{2\pi}\tilde{\Phi}_1(\xi_1,\xi_2),\tag{11}$$

$$\tilde{Q}_2=\frac{2{,}5}{2\pi}\left[m_1^*\tilde{\Phi}_2(\xi_1,\xi_2)-m_2^*\tilde{\Phi}_3(\xi_1,\xi_2)\right]-\frac{q_3^*}{2\pi}\tilde{\Phi}_1(\xi_2,\xi_1).$$

Необходимо теперь обратить выражения (11). Сначала найдём оригиналы функций (10) с использованием интегрального преобразования Фурье [12, с. 58]

$$F^{-1}\left[\tilde{f}(\xi_1,\xi_2)\right]=f(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}(\xi_1,\xi_2)e^{-i(\xi_1x_1+\xi_2x_2)}d\xi_1d\xi_2.\tag{12}$$

Получим

$$\Phi_1(x_1,x_2)=\frac{x_1\left(x_2^2-x_1^2\right)}{\left(x_1^2+x_2^2\right)^2},\qquad \Phi_3(x_1,x_2)=\frac{x_1x_2}{x_1^2+x_2^2}G_{1,1}\left(\sqrt{2{,}5}\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right),$$

$$\Phi_2(x_1,x_2)=\frac{1}{2}\left[G_{0,0}\left(\sqrt{2{,}5}\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)+\frac{x_2^2-x_1^2}{x_1^2+x_2^2}G_{1,1}\left(\sqrt{2{,}5}\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)\right],$$

$$\Phi_4(x_1,x_2)=\frac{x_1\left(3x_1^2+x_2^2\right)}{2\left(x_1^2+x_2^2\right)^2},\qquad \Phi_6(x_1,x_2)=-\frac{1}{2}\frac{x_1x_2}{x_1^2+x_2^2},\tag{13}$$

$$\Phi_5(x_1,x_2)=\frac{3x_2}{2\left(x_1^2+x_2^2\right)}G_{0,1}\left(\sqrt{2{,}5}\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)-\frac{x_2\left(3x_1^2-x_2^2\right)}{2\left(x_1^2+x_2^2\right)^2}G_{1,2}\left(\sqrt{2{,}5}\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right),$$

$$\Phi_7(x_1,x_2)=\frac{x_1}{2\left(x_1^2+x_2^2\right)}G_{0,1}\left(\sqrt{2{,}5}\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)-\frac{x_1\left(x_1^2-3x_2^2\right)}{2\left(x_1^2+x_2^2\right)^2}G_{1,2}\left(\sqrt{2{,}5}\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right),$$

где $G_{n,\nu}(rz)$ – специальная G-функция [13].

Применяя формулу обращения для двумерного интегрального преобразования Фурье (12) к трансформантам внутренних силовых факторов (11) и учитывая выражения (13), запишем выражения для H, Q_1, Q_2 в пространстве оригиналов

$$H=-\frac{1}{2\pi\left(x_1^2+x_2^2\right)}\left[-(1-\nu)m_1^*\frac{x_2\left(x_1^2+3x_2^2\right)}{2\left(x_1^2+x_2^2\right)}+m_1^*\left\{x_2G_{0,1}\left(\sqrt{2{,}5}\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)-\right.\right.$$
$$\left.-\frac{x_2\left(3x_1^2-x_2^2\right)}{\left(x_1^2+x_2^2\right)}G_{1,2}\left(\sqrt{2{,}5}\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)\right\}+(1-\nu)q_3^*\frac{x_1x_2}{2}-(1-\nu)m_2^*\frac{x_1\left(3x_1^2+x_2^2\right)}{2\left(x_1^2+x_2^2\right)}-$$
$$\left.+m_2^*\left\{x_1G_{0,1}\left(\sqrt{2{,}5}\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)+\frac{x_1\left(x_1^2-3x_2^2\right)}{\left(x_1^2+x_2^2\right)}G_{1,2}\left(\sqrt{2{,}5}\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)\right\}\right],\tag{14}$$

$$Q_1=\frac{2{,}5}{2\pi}\left[\frac{m_1^*}{2}\left\{G_{0,0}\left(\sqrt{2{,}5}\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)+\frac{x_2^2-x_1^2}{x_1^2+x_2^2}G_{1,1}\left(\sqrt{2{,}5}\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)\right\}-\right.$$

$$-m_2^* \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} G_{1,1}\left(\sqrt{2,5}\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right)\Bigg] - \frac{q_3^*}{2\pi} \frac{x_1\left(x_2^2 - x_1^2\right)}{\left(x_1^2 + x_2^2\right)^2},$$

$$Q_2 = \frac{2,5}{2\pi}\left[\frac{m_2^*}{2}\left\{G_{0,0}\left(\sqrt{2,5}\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right) + \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} G_{1,1}\left(\sqrt{2,5}\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right)\right\} - \right.$$

$$\left. - m_1^* \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} G_{1,1}\left(\sqrt{2,5}\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right)\right] - \frac{q_3^*}{2\pi} \frac{x_2\left(x_1^2 - x_2^2\right)}{\left(x_1^2 + x_2^2\right)^2}.$$

Численные исследования были проведены для следующих материалов пластин: золото и железо. Коэффициенты Пуассона (ν) для данных материалов равны: 0,42 и 0,28 соответственно [14, с. 200].

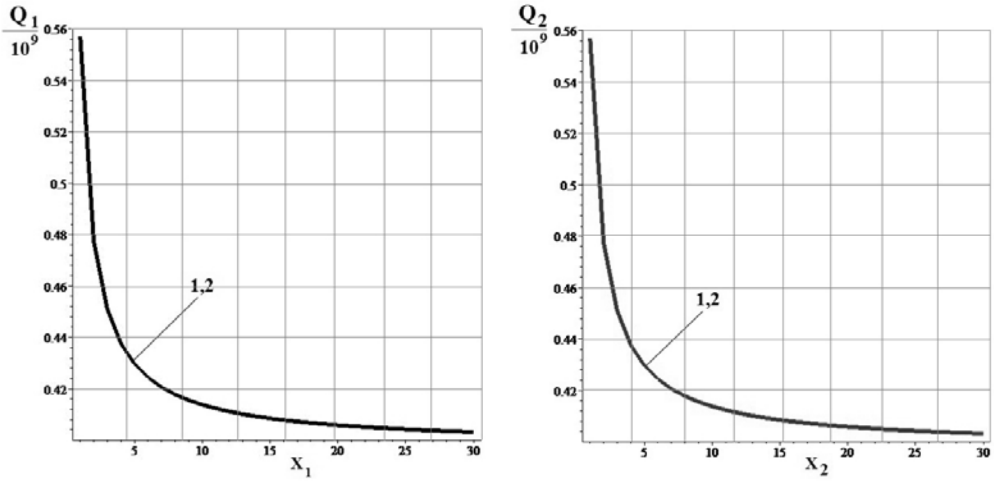

Рис. 1. Перерезывающие силы Q_1, Q_2

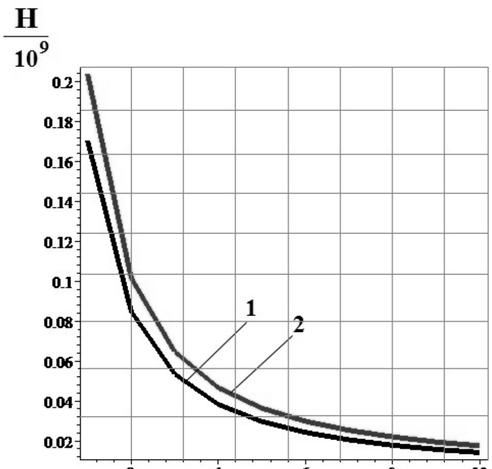

Рис. 2. Крутящий момент H

На рис. 1 представлены графики обобщенных перерезывающих сил Q_1, Q_2 соответственно. На рис. 2 – крутящий момент H. Кривая 1 – материал золото, кривая 2 – железо. Для второго материала значение коэффициента Пуассона уменьшено. Видно, что перерезывающие силы от упругих констант не зависят, а значение крутящего момента, при уменьшении коэффициента Пуассона – увеличивается.

Выводы

Таким образом, трехмерные уравнения теории упругости приведены к двумерным путем разложения искомых функций в ряды Фурье по полиномам Лежандра относительно толщинной координаты. Построено фундаментальное решение полученных уравнений. Исследовано влияние упругих параметров на НДС пластины.

Список использованной литературы

1. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек / С.А. Амбарцумян.– М.: Наука, 1974.– 446 с.
2. Гольденвейзер А.Л. Исследование напряженного состояния сферической оболочки / А.Л. Гольденвейзер // Прикл. математика и механика. – 1944. – 8, вып. 6. – С. 441 – 467.
3. Lukasiewicz S. Introduction of concentrated loads in plate and shells / S. Lukasiewicz // Progress in Aerospace Sciences. – 1976. – 17, N 2. – P. 109 – 1046.
4. Даревский В.М. Контактные задачи теории оболочек (действие локальных нагрузок на оболочки) / В.М. Даревский // Тр. VI Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластинок. – М.: Наука, 1966. – С. 927 – 933.
5. Жигалко Ю.П. Расчет тонких упругих цилиндрических оболочек на локальные нагрузки (обзор литературы, метод и результате) / Ю.П. Жигалко // Исследования по теории пластин и оболочек. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1966. – Вып. 4. – С. 3 – 41.
6. Понятовский В.В. К теории пластин средней толщины / В.В. Понятовский // Прикл. математика и механика. – 1962. – 26, № 2. – С. 335 – 341.
7. Понятовский В.В. К теории изгиба анизотропных пластинок / В.В. Понятовский // Прикл. математика и механика. – 1964. – 28, № 6. – С. 1033 – 1039.
8. Понятовский В.В. Уточненная теория трансверсально – изотропных пластин // Прикл. математика и механика. – 1967. – 28, № 6. – С. 72 – 92.
9. Хан Х. Теория упругости: Основы линейной теории и ее применения / Х. Хан.– М.: Мир, 1988.– 344 с.
10. Пелех Б.Л. Слоистые анизотропные пластины и оболочки с концентраторами напряжений / Б.Л. Пелех, В.А. Лазько.– К.: Наук. думка, 1982.– 296 с.
11. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике / В.С. Владимиров.– М.: Наука, 1976.– 280 с.
12. Снеддон И. Преобразования Фурье / И. Снеддон.– М.: Издательство иностранной литературы, 1955.– 668 с.
13. Хижняк В.К. Смешанные задачи теории пластин и оболочек: учебное пособие // В.К. Хижняк, В.П. Шевченко; ДонГУ.– Донецк: ДонГУ, 1980.– 128 с.
14. Дементьев А.Д. Прикладные задачи теории упругости / А.Д. Дементьев, Л.А. Назаров, Л.А. Назарова.– Новосибирск, 2002.– 224 с.