УДК 519.876.5

А.Г. ОВСКИЙ, В.В. ЛЕОНТЬЕВА
Запорожский национальный университет

ИНСТРУМЕНТАЛЬНАЯ СИСТЕМА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СТАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ НА БАЗЕ СИСТЕМ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ MAPLE И MAXIMA

Рассмотрена программная реализация гибридных (аналитико-численных) методов решения задач статической теории упругости для плит, массивов, основания, полуплоскости на двух системах компьютерной математики Maple и Maxima. Она построена в виде пакетов подпрограмм для каждой из систем. Подключив пакет к выбранной системе компьютерной математики, пользователь в интерактивном режиме, осуществляет ее настройку для автоматического вывода на ЕВМ решения задачи определенного класса. Результат аналитического решения задачи сохраняется в переменных и может быть применен для дальнейшего анализа в интерактивном режиме.

Ключевые слова: метод начальных функций, упрощающая символика, препроцессор, операторно-символическая форма.

О.Г. ОВСЬКИЙ, В.В. ЛЕОНТЬЄВА
Запорізький національний університет

ІНСТРУМЕНТАЛЬНА СИСТЕМА РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ СТАТИЧНОЇ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ НА БАЗІ СИСТЕМ КОМП'ЮТЕРНОЇ МАТЕМАТИКИ MAPLE І MAXIMA

Розглянута програмна реалізація гібридних (аналітико-чисельних) методів розв'язання задач статичної теорії пружності для плит, масивів, основи, півплощини на двох системах комп'ютерної математики Maple і Maxima. Вона побудована у вигляді пакетів підпрограм для кожної із систем. Підключивши пакет до обраної системи комп'ютерної математики, користувач в інтерактивному режимі здійснює її налаштування для автоматичного виведення на ЕОМ розв'язку задачі певного класу. Результат аналітичного розв'язання задачі зберігається в змінних і може бути застосований для подальшого аналізу в інтерактивному режимі.

Ключові слова: метод початкових функцій, спрощувальна символіка, препроцесор, операторно-символічна форма.

A.G. OVSKY, V.V. LEONTIEVA
Zaporizhzhya National University

INSTRUMENTAL SYSTEM OF DECISION OF STATIC ELASTICITY THEORIES TASKS ON THE BASIS OF COMPUTER'S MATHEMATICAL SYSTEMS MAPLE AND MAXIMA

Program implementation hybrid's (analytical-numerical) methods of the decision of tasks of the static elasticity theory for plates, arrays, the bases, half-planes on two computer's mathematical systems Maple and Maxima are considered. It is constructed in the form of subroutine packages for each of systems. Connecting a packet to the computer mathematics selected system, the user in an interactive mode, carries out its adjustment for an automatic output on COMPUTER decisions of the task of a certain class. Result of the task's analytical decision is saved in variables and can be applied for further to the analysis in an interactive mode.

Keywords: method of the initial functions, simplifying symbolics, preprocessor, operational symbolic form.

Постановка проблемы

В настоящее время, в связи с появлением новых конструктивных материалов, возникает необходимость в росте прочности машин и конструкций с параллельным снижением их себестоимости и расходов на их обслуживание. В связи с этим, остро встает вопрос о разработке новых математических методов для расчета напряженно-деформируемого состояния различных тел и конструкций. Большинство из разработанных методов применяются в системах автоматического проектирования. В каждой из систем реализуется основной вычислительный метод, который составляет ядро системы. В большинстве случаев используются приближенные численные методы, поскольку они оперируют с дискретным набором данных. Аналитические методы используются реже, поскольку программирование аналитических операций в системах программирования и разработки приложений (Borland C++ Builder, Delphi и т.д.) является отдельной и сложной задачей. Поэтому для реализации аналитических методов на ЭВМ весьма удобно использовать системы компьютерной математики (СКМ), которые обладают встроенными вычислительными возможностями по обработке аналитических операций. Однако в этом подходе существуют свои сложности: СКМ базируются на достижениях в общих разделах математики (алгебра, математический анализ, статистика и т.д.) и не всегда могут полностью обработать результат решения конкретной технической задачи. Поэтому они редко применяются в исследованиях сложных технических проблем. Несмотря на недостатки систем компьютерной математики все же возможно использование их вычислительных средств в качестве составных частей программных комплексов для решения конкретных классов технических задач (системы компьютерной математики допускают программирование различных алгоритмов на встроенном языке и могут использоваться в качестве инструментов для создания новых приложений, на основе которых строится комплекс).

Именно этой идее и посвящена предлагаемая работа, в которой характеризуется разработанный авторами программный продукт– инструментальная система решения статических задач теории упругости для плит, пластин, полупространства, построенная в виде пакетов подпрограмм для двух систем компьютерной математики Maple и Maxima. Отдельно выделяется характеристика препроцессора инструментальной системы, с помощью которого осуществляется процесс предварительного вывода символического дифференциального решения в системе.

Анализ последних исследований и публикаций

Значительный вклад в научные достижения по автоматизации проектирования задач теории упругости, внесли ученые: Д.В. Вайнберг, А.С. Городецкий, В.С. Гудрамович, В.К. Кабулов, В.В. Киричевский, В.Н. Кислоокий, В.В. Пожуев, В.А. Постнов, В.А. Толок, А.Н Шевченко. В направлении программирования аналитических операций получены фундаментальные результати учеными: В.З. Аладьевым, Н.Н. Васильевым, В.П. Дьяконовым, Г.Б. Ефимовым, М.В. Грошевой, Э.Ю. Зуевой, В.В. Івановым, Д.М. Климовым, В.А. Шурыгиным.

Цель исследования

Представить новый программный продукт - инструментальную систему, которая поставляется в виде двух пакетов подпрограмм для двух систем компьютерной математики Maple и Maxima. Охарактеризовать ее препроцессор, привести пример ее работы на задаче статической теории упругости.

Изложение основного материала исследования

Характеристика системы. Предлагаемая система состоит из трех основных блоков: препроцессора, процессора и постпроцессора. Препроцессор занимается обработкой вводимых пользователем данных и выводом предварительного дифференциального символического решения. Перед решением задачи на языке выбранной СКМ необходимо описать входные и выходные параметры, далее с помощью подключения пакета подпрограмм осуществить процесс решения поставленной задачи. Система работает как программное расширение СКМ. Это позволяет пользователям, которые освоили базовые принципы работы с СКМ перейти к решению задач, воспользовавшись документацией к подключаемому пакету подпрограмм. В результате применения такой схемы пользователи могут легко вносить изменения в работу с документами СКМ, использующими созданную библиотеку. Сам же пакет закрыт и защищен от модификаций. Результаты работы процессора можно легко использовать в процессе работы с системой Maple (или Maxima), общий результат можно использовать в дальнейшем анализе.

Препроцессор – набор процедур, предназначенный для автоматизации подготовки исходных данных. В системе он занимается выводом предварительного решения в операторно-символической форме и заданием начальных функций и граничных условий задачи.

Препроцессор системы также занимается следующими заданиями:

а) выбор размерности задачи (двумерная или трехмерная);

б) выбор системы координат (декартовая, полярная, цилиндрическая, сферическая);

в) выбор формы получаемого методом начальных функций операторно-символического решения (бигармоническое, экспоненциальное);

г) реализация построения методом *Ф*-функций решения, удовлетворяющего бигармоническому уравнению [3];

д) вывод решения в виде операторов [4];

Процессор – важнейшая часть работы системы. Процесс работы препроцессора, выполняющего расчеты методами начальных функций В.З. Власова [1] и алгоритмом вывода аналитического решения задачи упругости для полуплоскости В.А. Толока, можно условно разбить на следующие этапы:

а) перевод решения из операторно-символической формы в алгебраическую [5];

б) реализация процедуры Галеркина [2];

в) интегрирование и дифференцирование выражений с радикалами;

г) числовой счет.

В роли постпроцессора выступают графические процедуры выбранной системы компьютерной математики. Средств графического пакета выбранной СКМ достаточно для того, чтобы полностью дать графическую интерпретацию полученных решений. В случае усложнения анализа численной информации рассматриваемых задач разработчик может изменить постпроцессирование, введя дополнительные функции в графические пакеты СКМ. Разработанные пакеты могут быть интегрированы в ядро систем компьютерной математики для повышения скорости проведения вычислений.

Работа в инструментальной системе. Язык системы предназначен для описания рассматриваемой задачи и методов ее расчета, используя структурный подход. Все инструкции, описывающие модель и расчетную методику, должны относиться к определенному классу типа задаваемой задачи, для которой они будут действительны. Под типом задачи здесь подразумевается деление в зависимости от размерности, типа используемых координат и наличия в условии признаков, позволяющих сделать вывод о структуре задаваемого объекта (пластина, плита, основание, полуплоскость). Безотносительно к какому-либо типу задачи могут задаваться лишь глобальные константы и функции, определенные пользователем.

Для того, чтобы решить поставленные задачи необходимо запустить среду Maple и подключить откомпилированную библиотеку к создаваемому документу. Для этого в режиме worksheet Maple набирается следующая последовательность команд:

```
restart;
read(`c:/Vlasov.m`);
with(vlasov):
```

После подключения библиотеки, вызывается ее главная процедура operators со следующим списком параметров в скобках: v_axes – обязательный параметр, задает систему координат (cartesian – обычная декартовая система, polar – полярная); v_dimension - обязательный параметр, задающий размерность задачи (2-плоская задача, 3-трехмерная); v_change – необязательный параметр, меняет ось, относительно которой строится решение в плоской задаче (принимает значение yes), по умолчанию строится решение относительно оси y, на практике можно получать решение и для оси x; v_type – тип решения, bigarmonic-бигармоническое (exp - экспоненциальное). Для трехмерной задачи вместо необязательного параметра v_change используется обязательный v_axe (x, y, z – оси вывода). Вызвав процедуру operators и задав начальную инициализацию, автоматически получаем решение общей задачи теории упругости. Пример вызова ниже:

```
operators(v_axes=cartesian,v_dimension=3,v_axe=z,v_type=bigarmonic):
operators(v_axes=cartesian,v_dimension=2,v_type=bigarmonic):
```

Общее решение предоставляется в операторно-символической форме и хранится в переменных Maple U, V, X, Y, sigmax, sigmay, tau в случае двумерной задачи и *в U, V, W, X, Y, Z,* sigmax, sigmay, tau – в трехмерном случае. Операторно-символическая форма, содержащая дифференциалы высших порядков слишком сложна для проведения вычислительных операций. Для двумерного случая эти операции осуществляются путем вызова процедур библиотеки n(expr), где expr – решение в операторной форме (а именно через операторы Luu, Luv и т.д.) и num(expr) для трехмерной задачи. После перевода в численную форму над решением проводятся операции по интегрированию, осуществляется процедура Галеркина и строятся уравнения, с помощью которых решается задача и находятся коэффициенты An, Bn для двумерной задачи и Anm, Bnm, Cnm – для трехмерной. Для двумерной задачи – процедура galerkin2(expr, sin(a[n] x)), трехмерная - galerkin(expr, sin(a[n] x)*cos(b[m] y)).

В процессе программирования аналитического метода начальных функций В.З. Власова в Maple была создана библиотека Vlasov.m для автоматического выделения операторов общего решения уравнений теории упругости в двумерной и трехмерной постановке.

В библиотеке используются следующие функции системы Maple. Функция simplify(expr) – упрощение выражения expr. В данной форме записи производится символическое (алгебраическое) упрощение выражения expr. Функция subs(старое_выражение = новое_выражение, выражение) – замена переменной (выражения) на их новые символические значения. Функция solve(уравнение, переменная) – решение одного уравнения относительно заданной переменной. Функция collect(expr, x) производящая приведение подобных членов по заданной неизвестной величине x (может принимать список неизвестных величин в случае полинома нескольких переменных) [7].

В случае системы компьютерной математики Maxima для уточнения типа задачи вводятся служебные слова operators и polupro с похожим типом фактических параметров. Они описывают размерность задачи, тип координат, вид общего препроцессорного решения. И глобальная переменная n_sloy – указывающая, со скольких слоев состоит объект в задаче.

Первым оператором при описании типа задачи должен быть **`load("имя_библиотеки")`** инициирующий обращение к препроцессору [8]. Далее следуют глобальная переменная n_sloy и служебное слово operators (или polupro), уточняющее тип задачи.

Для того, чтобы решить поставленные задачи необходимо запустить среду maxima и подключить откомпилированную библиотеку к создаваемой программе. Для этого в интерактивном режиме набирается следующая последовательность команд.

```
kill(all)$
load("d:\\vlasov\\vlas.mac")$
operators(D3,cartesian,z)$
```

После подключения библиотеки, вызывается ее главная процедура operators со следующим списком параметров в скобках: D3 - обязательный параметр, задающий размерность задачи (2-плоская задача, 3-трехмерная); cartesian – обязательный параметр, задает систему координат (cartesian – обычная декартовая система, polar – полярная); тип решения, bigarmonic-бигармоническое (exponential - экспоненциальное). (x, y, z – оси вывода). Вызвав процедуру operators и задав начальную инициализацию, автоматически получаем решение общей задачи теории упругости.

```
operators(D3,cartesian,z)$
operators(D2,cartesian)$
```

Общее решение предоставляется в операторно-символической форме и хранится в переменных U, V, X, Y, sigmax, sigmay, tau в случае двумерной задачи и в U, V, W, X, Y, Z, sigmax, sigmay, tau – в трехмерном случае. Для вывода предварительного операторно-символического решения используется упрощающая символика

Пример работы системы. Задача о равновесии двухслойного упругого основания под действием вертикальной равномерно распределенной нагрузки *p*, приложенной по верхней прямой основания *y* = *h*. Длина основания $|A_1 - A_2|$, ширина *h*. Отрезок действия нагрузки *p* $[a_1, a_2]$, при этом $A_1 < a_1 < a_2 < A_2$. Вводится предположение, что основание расположено на жестком материке, причем между материком отсутствует трение.

Перемещения и напряжения в первом слое упругого основания, работающего в условиях плоско-деформируемого состояния, могут быть представлены в виде:

$$U_i = \sum_{k=1}^{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(A_{ik}(y,\alpha)\; f_i(x,\alpha)\; u_k^0(\alpha) + B_{ik}(y,\alpha)\; g_i(x,\alpha)\; u_k^{0^*} \right) d\alpha\;,\quad (i = \overline{1,5}) \cdot \tag{1}$$

где $f_i(x,\alpha) = \sin\alpha x$ при $i = 1,\,4$ и $f_i(x,\alpha) = \cos\alpha x$ при $i = 2,\,3,\,5$;

$g_i(x,\alpha) = \cos\alpha x$ при $i = 1,\,4$ и $g_i(x,\alpha) = \sin\alpha x$ при $i = 2,\,3,\,5$;

через A_{ik} обозначены известные функции числовой формы операторов *L* согласно работе [6] для начальных функций

$$\left.\begin{aligned} U_1^0 &= \sum_{n=1}^{\infty} u_{1n}^0 \sin\alpha_n x, \quad U_2^0 = \sum_{n=1}^{\infty} u_{2n}^0 \cos\alpha_n x, \\ U_3^0 &= \sum_{n=1}^{\infty} u_{3n}^0 \sin\alpha_n x, \quad U_4^0 = \sum_{n=1}^{\infty} u_{4n}^0 \cos\alpha_n x, \end{aligned}\right\};$$

$$A_{11} = \frac{1}{G}\left(ch\,\alpha y + \frac{\alpha\, y\, sh\,\alpha y}{2(1-\nu_1)} \right),\quad A_{23} = \frac{1}{4G\,(1-\nu_1)}\left(\frac{3-4\nu_1}{\alpha} sh\,\alpha\, y - y\, ch\,\alpha \right) \text{ и т.д.;}$$

функции B_{ik} определяются, так же как и функции A_{ik} из выражений работы [6] только для начальных функций:

$$\left.\begin{aligned} U_1^0 &= \sum_{n=1}^{\infty} u_{1n}^0 \cos\alpha_n x, \quad U_2^0 = \sum_{n=1}^{\infty} u_{2n}^0 \sin\alpha_n x, \\ U_3^0 &= \sum_{n=1}^{\infty} u_{3n}^0 \cos\alpha_n x, \quad U_4^0 = \sum_{n=1}^{\infty} u_{4n}^0 \sin\alpha_n x, \end{aligned}\right\}$$

т.е. отличается от формы Рибьера, где сначала идет sin, а потом cos.

Напряжения и перемещения в произвольном *m*-м слое неограниченного основания в случае непрерывности векторов перемещений и напряжений при переходе через плоскость контакта слоев, определяются по формулам

$$U_i = \sum_{k=1}^{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(A_{ik}^*\; f_i\, u_k^0 + B_{ik}^*\; g_i\, u_k^{0^*} \right) d\alpha\;,\quad (i = \overline{1,5}) \tag{2}$$

здесь, матрицы $\left\| A^*_{ik} \right\|$ и $\left\| B^*_{ik} \right\|$ представляют собой соответственно произведение матриц

$$\left\| A_{ik}^{(j)}(\alpha, h_j, \nu_j, G_j) \right\| \qquad \left\| A_{ik}^{(m)}(\alpha, y, \nu_m, G_m) \right\|$$

и

$$\left\| B_{ik}^{(j)}(\alpha, h_j, \nu_j, G_j) \right\| \qquad \left\| B_{ik}^{(m)}(\alpha, y, \nu_m, G_m) \right\|$$

$$(j = 1, 2, \ldots, m-1), \quad (h_{m-1} \le y \le h_m).$$

Неизвестные функции u_k^0 и $u_k^{0^*}$ находятся из граничных условий на плоскости.

На начальной прямой $y = 0$ перемещение U_2 и касательное напряжение равны 0. Для определения остальных неизвестных функций используются граничные условия задачи на верхней прямой $y = h$. Нагрузка p представляется в виде интеграла Фурье:

$$p\,(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int_{a_1}^{a_2} p\,(\lambda)\,\cos\alpha(\lambda - x)\,d\lambda. \tag{3}$$

Приравниванием выражения для напряжений U_3 и U_4 из граничной прямой $y = h$ соответственно значению (3) и 0, получается СЛАУ для определения неизвестных начальных функций

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1,3} A_{41}^*(\alpha h) u_i^0 = -\frac{1}{2\pi}\int_{a_1}^{a_2} p(\lambda)\,\cos\,\alpha\lambda\, d\lambda; \ \sum_{i=1,3} A_{31}^*(\alpha h) u_i^0 = 0; \\ &\sum_{i=1,3} B_{41}^*(\alpha h) u_i^0 = -\frac{1}{2\pi}\int_{a_1}^{a_2} p(\lambda)\,\sin\,\alpha\lambda\, d\lambda; \ \sum_{i=1,3} B_{31}^*(\alpha h) u_i^0 = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Определяя из (4) функции u_i^0 и $u_i^{0^*}$ $(i = 1, 3)$ и подставляя в (2), находим напряженное и деформированное состояние упругого основания. Выражения (2) не являются интегрируемыми в элементарных функциях, поэтому используются методы численного интегрирования с конечными границами для построения числовых решений.

Исходные данные для расчета:

$A1 = -20$

$A2 = 20$

$a1 = -5$

$a2 = 5$

$h_0 = 0$

$h_1 = 2$

$h_2 = 2$

$E = 10000.0$

$G_1 = \dfrac{5000.0}{\nu_1 + 1}$

$G_2 = \dfrac{50000.0}{\nu_1 + 1}$

$\nu_1 = 0.2$

$\nu_2 = 0.3$

$\mathrm{p}(lambda) = -1$

Вид графиков числовых решений на рис. 1.

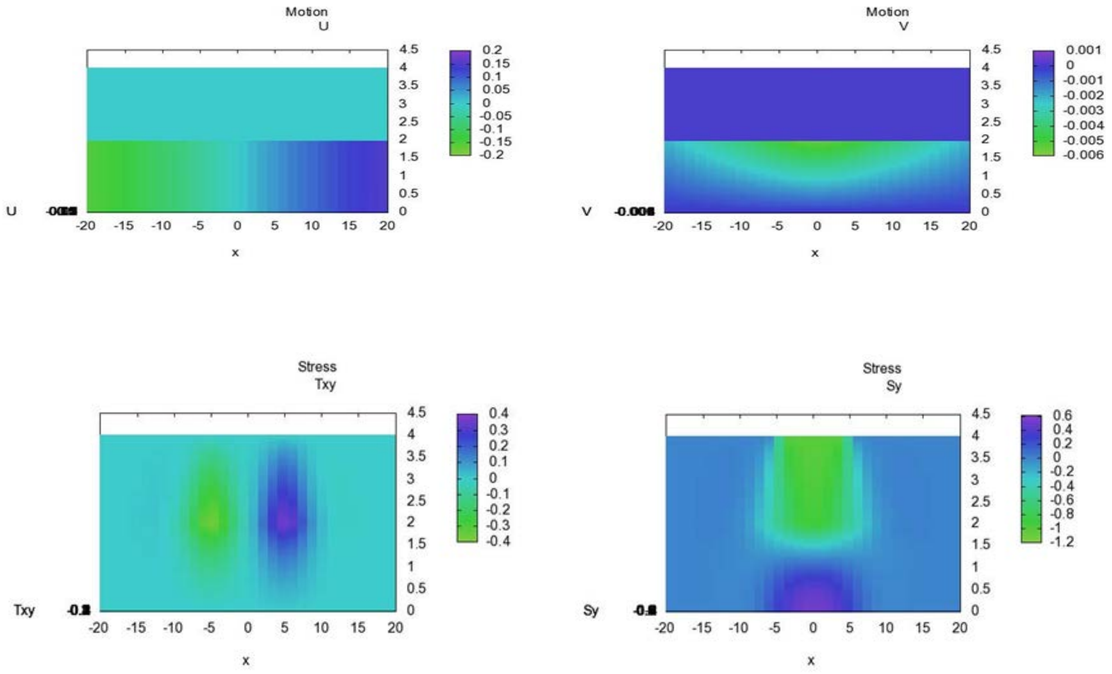

Рисунок 1. – Перемещения и напряжения двумерного упругого основания

Выводы

В работе была представлена инструментальная система решений задач статической теории упругости и охарактеризован ее препроцессор. Область применения системы – расчет статических задач теории упругости для однородных и слоистых конструкций для плит, пластин аналитическим методом начальных функций В.З. Власова. В систему интегрированы подпрограммы работы с упрощающей символикой, которая позволяет работать с дифференциальными и интегральными выражениями, как с алгебраическими с учетом правил дифференцирования и интегрирования.

Список использованной литературы

1. Власов В. З. Балки плиты и оболочки на упругом основании. / В. Власов, Н. Леонтьев – Москва: ФИЗМАТГИЗ, 1960. – 491 с.
2. Горшков А.Г. Теория упругости и пластичности / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, Д.В. Талаковский; Учеб. Для вузов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 416 с.
3. Полянин А.Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики / А.Д. Полянин – М. ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 576 с.
4. Овский А.Г. Использование системы Maple при реализации метода начальных функций Власова / Е.Е. Галан, А.Г. Овский, В.А. Толок // Вісник Запорізького національного університету: Збірник наукових статей. Фізико-математичні науки. – Запоріжжя: ЗНУ. – 2008. - №1. – С. 16-26.
5. Овский А.Г. Моделирование схемы решения трехмерной задачи теории упругости в системе Maple / А.Г. Овский, В.А. Толок // Гідроакустичний журнал. – 2008. - № 3. – С. 88-97.
6. Овский А.Г. Препроцессор решения статических двумерных и трехмерных задач теории упругости / А.Г. Овский, В.А. Толок // Журнал информационные технологии моделирования и управления. – Воронеж: Воронежский государственный технический университет. Липецкий государственный университет. Бакинский государственный университет. – 2014. - №1(85). – С. 47-58.
7. Матросов А.В. Maple6. Решение задач высшей математики и механики. – СПб.: БХВ-Петербург, 2002. – 528 с.
8. Силаев П.К., Ильина В.А. Система аналитических вычислений Maxima для физиков-теоретиков / П.К. Силаев, В.А. Ильина. – Москва: МГУ им. Ломоносова, 2007. – 112 с.