УДК 519.6

І.І. ДЕМКІВ, І.С. КОСТЕНКО
Національний університет "Львівська політехніка"

ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИЙ ДРІБ ДЛЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ З ОДНИМ ДВОКРАТНИМ ВУЗЛОМ

Будується та досліджується інтерполяційний дріб типу Ерміта для функції однієї змінної з одним двократним вузлом. Наведено декілька прикладів.
Ключові слова: інтерполяція, континуальна множина вузлів, ланцюгові дроби.

И.И. ДЕМКИВ, И.С. КОСТЕНКО
Национальный университет "Львовськая политехника"

ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ДРОБЬ ДЛЯ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ С ОДНИМ ДВУКРАТНЫМ УЗЛОМ

Строится и исследуется интерполяционная дробь типа Эрмита для функции одной переменной с одним двукратным узлом. Приведены несколько примеров.
Ключевые слова: интерполяция, континуальное множество узлов, цепные дроби.

I.I. DEMKIV, I.S. KOSTENKO
Lviv polytechnic National University

INTERPOLATION FRACTION FOR FUNCTION OF ONE VARIABLE WITH ONE TWOFOLD NODE

An interpolation fraction of Hermite type for function pf one variable with one twofold node is constructed and investigated. Several examples are given.
Keywords: interpolation, continual set of nodes, chain fractions.

Вступ

Уперше інтерполяційні інтегральні ланцюгові дроби (І ІЛД) були введені у роботі [1]. У ній також доведено, що вказане там визначення ядер є необхідною умовою, щоб інтегральний ланцюговий дріб був інтерполяційним для функціоналів $F : L_1(0,1) \to R^1$ на континуальній множині вузлів

$$x^n(\cdot,\boldsymbol{\xi}^n) = x_0(\cdot) + \sum_{i=1}^{n} H(\cdot - \xi_i)\left[x_i(\cdot) - x_{i-1}(\cdot)\right] \tag{1}$$

$$\boldsymbol{\xi}^n = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in \boldsymbol{\Omega}_{z^n} = \left\{\mathbf{z}^n : 0 \le z_1 \le \ldots \le z_n \le 1\right\}.$$

Тут через $x_i(z) \in Q[0,1]$, $i = 0,1,\ldots$ позначені довільні, фіксовані елементи з простору $Q[0,1]$ – кусково-неперервних на відрізку $[0,1]$ функцій зі скінченою кількістю точок розриву першого роду. $H(t)$ – функція Хевісайда.

Для скороченого запису скінченного ІЛД використаємо наступні позначення

$$\cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{\ddots}{\cfrac{a_n}{b_n}}}} = \mathop{D}_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b_i} = \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots + \frac{a_n|}{|b_n}.$$

Досліджуваний у [1] та І ІЛД має одну ваду. Якщо у формулі (1) покласти $x_i(z) \equiv x_i = const$, $i = \overline{0,n}$, $x(z) \equiv x = const$, то І ІЛД не перейде у інтерполяційний ланцюговий дріб для функції однієї змінної. Щоб позбутися цієї вади у [2] уведений новий клас І ІЛД вигляду

$$Q_n(x(\cdot)) = K_0^I + \mathop{D}_{i=1}^{n} \frac{q_i(x(\cdot))}{1}, \tag{2}$$

де $q_m\left(x(\cdot)\right)=\int\limits_0^1\int\limits_{z_1}^1\dots\int\limits_{z_{m-1}}^1 K_m^I\left(\mathbf{z}^m\right)\prod\limits_{l=1}^m\left[x(z_l)-x_{l-1}(z_l)\right]dz_l$.

У [2] доведено, що для того щоб ІЛД вигляду (2) був інтерполяційним для гладкого функціоналу $F\left(x(\cdot)\right):Q[0,1]\to R^1$ на континуальній множині вузлів (1), необхідно, щоб його ядра визначались за формулами

$$K_p^I\left(\xi^p\right)=(-1)^p\prod_{i=1}^p\left[x_i(\xi_i)-x_{i-1}(\xi_i)\right]^{-1}\frac{\partial^p}{\partial\xi_1\dots\partial\xi_p}\mathop{D}_{i=1}^{p}\frac{q_{p-i}\left(x^p\left(\cdot,\xi^p\right)\right)}{-1},$$

$$q_m\left(x^p\left(\cdot,\xi^p\right)\right)=\int\limits_0^1\int\limits_{z_1}^1\dots\int\limits_{z_{m-1}}^1 K_m^I\left(\mathbf{z}^m\right)\prod_{l=1}^m\left[x^p\left(z_l,\xi^p\right)-x_{l-1}(z_l)\right]dz_l,\ m=1,3,\dots,n,\ p=2,3,\dots,n,$$

$$q_0\left(x^p\left(\cdot,\xi^p\right)\right)=F\left(x_0(\cdot)\right)-F\left(x^p\left(\cdot,\xi^p\right)\right)-1,\quad K_0^I=F\left(x_0(\cdot)\right),$$

$$K_1^I(\xi_1)=-\left[x_1(\xi_1)-x_0(\xi_1)\right]^{-1}\frac{\partial}{\partial\xi_1}F\left(x_0(\cdot)+H(\cdot-\xi_1)\left(x_1(\cdot)-x_0(\cdot)\right)\right),$$

а достатньою умовою є виконання правила підстановки (див. [2]).

Правило підстановки накладає суттєві обмеження на функціонал. Тому в роботі [3] досліджується І ІЛД, який не вимагає виконання правила підстановки. Якщо в одержаному у [2] та [3] І ІЛД покласти $x_i(z)\equiv x_i=const$, $i=\overline{0,n+1}$, $x(z)\equiv x=const$, то одержимо однакові дроби вигляду

$$Q_{n+1}^I(x)=F(x_0)+\mathop{D}_{i=1}^{n+1}\frac{q_i(x)}{1},\tag{3}$$

де

$$q_1(x)=(x-x_0)F_{01},\quad q_2(x)=-\prod_{i=1}^2\frac{x-x_{i-1}}{x_2-x_{i-1}}\left[1-f_2(x_2)\right],\ \dots,$$

$$q_{n+1}(x)=-\prod_{i=1}^{n+1}\frac{x-x_{i-1}}{x_{n+1}-x_{i-1}}\left[1-f_{n+1}(x_{n+1})\right];$$

$$f_2(x)=(x-x_0)\frac{F_{01}}{F(x_2)-F(x_0)};\ \dots,\ f_k(x)=\mathop{D}_{i=1}^{k}\frac{q_{k-i}(x)}{-1},$$

$$q_0(x)=F(x_0)-F(x)-1,\quad k=3,4,\dots,n.\tag{4}$$

Тут використано позначення

$$F_{0k}=\frac{F(x_k)-F(x_0)}{x_k-x_0},\ k=1,2,\dots\ .$$

Правильною є наступна теорема.

Теорема 1. *Ланцюговий дріб (3), (4) є інтерполяційним для функції* $F(x):[a,b]\to R^1$ *з вузлами* $x_i\in[a,b]$, $i=\overline{0,n}$.

Метою цієї роботи є побудова на основі (3), (4) ланцюгового дробу $Q_{n+1}^E(x)$*, що інтерполює функцію* $F(x):[a,b]\to R^1$ *з вузлами* $x_i\in[a,b]$, $i=\overline{0,n}$*, один з яких двократний. Нехай* x_k *– двократний. Тоді треба побудувати ланцюговий дріб, що задовольняє наступні умови*

$$Q_{n+1}^E(x_i)=F(x_i),\quad Q_{n+1}^{E\ \prime}(x_k)=F'(x_k),\quad 1\le k\le n+1,\quad x_{k+1}=x_k\quad i=\overline{0,n+1}.\tag{5}$$

Побудова інтерполяційного дробу.

Розглянемо $Q_{n+1}^E(x)$ вигляду (3), (4). Послідовність вузлів $x_0, x_1, x_2,\dots,x_{n+1}$ подамо у вигляді x_0, x_1, …, x_k, $x_{k+1}=x_k+\alpha_k$, …, x_{k+2}, …, x_{n+1}, де $\alpha_k\in R$. Після нескладних перетворень та переходу до границі при $\alpha_k\to 0$ одержимо

$$q_1^E(x)=q_1(x)=(x-x_0)F_{01};\qquad q_2^E(x)=q_2(x)=-\prod_{i=1}^{2}\frac{x-x_{i-1}}{x_2-x_{i-1}}\left[1-f_2(x_2)\right];$$

$$\ldots,\ q_k^E(x)=q_k(x)=-\prod_{i=1}^{k}\frac{x-x_{i-1}}{x_k-x_{i-1}}\left[1-f_k(x_k)\right];$$

$$f_2^E(x)=f_2(x);\ \ ;\ f_k^E(x)=f_k(x);\tag{6}$$

$$q_{k+1}^E(x)=-\lim_{\alpha_k\to 0}\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\prod_{i=1}^{k}\frac{x-x_{i-1}}{x_{k+1}-x_{i-1}}\left[1-f_{k+1}^E(x_{k+1})\right]=$$

$$=\lim_{\alpha_k\to 0}\frac{x-x_k}{\alpha_k}\prod_{i=1}^{k}\frac{x-x_{i-1}}{x_k+\alpha_k-x_{i-1}}\left[\frac{q_k^E(x_k+\alpha_k)}{f_k^E(x_k+\alpha_k)-1}-1\right]=$$

$$=\lim_{\alpha_k\to 0}\frac{x-x_k}{\alpha_k}\prod_{i=1}^{k}\frac{x-x_{i-1}}{x_k+\alpha_k-x_{i-1}}\left[\frac{\left[q_k^E(x_k+\alpha_k)-q_k^E(x_k)\right]-\left[f_k^E(x_k+\alpha_k)-f_k^E(x_k)\right]}{f_k^E(x_k+\alpha_k)-1}\right]=$$

$$=(x-x_k)\prod_{i=1}^{k}\frac{x-x_{i-1}}{x_k-x_{i-1}}\left[\frac{q_k^{E\prime}(x_k)-f_k^{E\prime}(x_k)}{f_k^E(x_k)-1}\right];$$

$$q_{k+2}^E(x)=-\frac{(x-x_k)^2}{(x_{k+2}-x_k)^2}\prod_{i=1}^{k}\frac{x-x_{i-1}}{x_{k+2}-x_{i-1}}\left[1-f_{k+2}^E(x_{k+2})\right];$$

…………………………………………………………………

$$q_{n+1}^E(x)=-\prod_{j=k+2}^{n+1}\left(\frac{x-x_j}{x_{n+1}-x_j}\right)\left(\frac{x-x_k}{x_{n+1}-x_k}\right)^2\prod_{i=1}^{k}\frac{x-x_{i-1}}{x_{n+1}-x_{i-1}}\left[1-f_{n+1}^E(x_{n+1})\right].\tag{7}$$

$$f_p(x)=\mathop{D}_{i=1}^{p}\frac{q_{p-i}^E(x)}{-1},\qquad p=\overline{k+2,n+1}\qquad q_0(x)=F(x_0)-F(x)-1,$$

$$Q_{n+1}^E(x)=F(x_0)+\mathop{D}_{i=1}^{n+1}\frac{q_i^E(x)}{1}.\tag{8}$$

Теорема 2. *Ланцюговий дріб (6), (7), (8) є інтерполяційним для функції* $F(x):[a,b]\to R^1$ *з вузлами* $x_i\in[a,b]$, $i=\overline{0,n}$ *та задовільняє інтерполяційні умови (5).*

Доведення. Згідно теореми 1 маємо

$$Q_{n+1}^E(x_i)=F(x_i),\quad x_{k+1}=x_k\quad i=\overline{0,n+1}.$$

Перевіримо інтерполяційність похідної у точці x_k $\quad 1\le k\le n+1$.

$$Q_{n+1}^{E}{}'(x_k)=\lim_{\alpha_k\to 0}\frac{1}{\alpha_k}\left[Q_{n+1}^E(x_k+\alpha_k)-Q_{n+1}^E(x_k)\right]=\lim_{\alpha_k\to 0}\frac{1}{\alpha_k}\left[Q_{k+1}^E(x_k+\alpha_k)-Q_k^E(x_k)\right]=$$

$$=\lim_{\alpha_k\to 0}\frac{1}{\alpha_k}\left[F(x_k+\alpha_k)-F(x_k)\right]=F'(x_k).$$

Отже, теорему доведено.

Частковий випадок.

Розглянемо випадок двох вузлів. Нехай, наприклад, вузол x_0 – однократний, а вузол x_1 – двократний. З (6) – (8) одержимо

$$Q_2^E(x(\cdot))=F(x_0)+\frac{q_1^E(x)\big|}{\big|1}+\frac{q_2^E(x)\big|}{\big|1},\tag{9}$$

де $q_1^E(x)=\dfrac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}\left(F(x_1)-F(x_0)\right)$,

$$q_2^E(x) = -\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_1-x_0)}\left[\frac{(x_1-x_0)F'(x_1)-(F(x_1)-F(x_0))}{(x_1-x_0)(F(x_1)-F(x_0))}\right]. \quad (10)$$

Дріб (9) – (10) є інтерполяційним для функції $F(x):[a,b]\to R^1$ з вузлами x_0, x_1 і задовільняє наступні інтерполяційні умови

$$Q_2^E(x_0)=F(x_0); \quad Q_2^E(x_1)=F(x_1), \quad Q_2^{E\prime}(x_1)=F'(x_1). \quad (11)$$

Доведення інтерполяційності функції у вузлах x_0, x_1 здійснюється безпосередньою перевіркою. Також легко перевіримо третю інтерполяційну умову з (11). Виходячи з означення похідної маємо

$$Q_2^{E\prime}(x_1) = \lim_{\alpha_2\to 0}\frac{Q_2^E(x_1+\alpha_2)-Q_2^E(x_1)}{\alpha_2} =$$

$$= \lim_{\alpha_2\to 0}\frac{1}{\alpha_2}\frac{\alpha_2 F_{01}+\alpha_2(x_1+\alpha_2-x_0)\dfrac{(x_1-x_0)F'(x_1)-(F(x_1)-F(x_0))}{(x_1-x_0)^2}}{1+q_2^E(x_1+\alpha_2)} = F'(x_1).$$

Приклад 1. Для функції $y=x^3$ побудуємо інтерполяційний дріб (9) – (10).

Одержимо

$$Q_2^E(x(\cdot)) = x_0^3 + \frac{(x_1^3-x_0^3)\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}}{1-\dfrac{x_0+2x_1}{x_1^3-x_0^3}(x-x_0)(x-x_1)}.$$

Інтерполяційні умови у вузлах x_0, x_1 здійснюються безпосередньою перевіркою. Легко перевірити і третю інтерполяційну умову

$$Q_2^{E\prime}(x_1) = \lim_{\alpha_2\to 0}\frac{1}{\alpha_2}\frac{q_1^E(x_1+\alpha_2)-q_1^E(x_1)-q_1^E(x_1)q_2^E(x_1+\alpha_2)}{1+q_2^E(x_1+\alpha_2)} =$$

$$=(x_0+2x_1)(x_1-x_0)+x_0^2+x_1x_0+x_1^2=3x_1^2.$$

Висновок

Таким чином, у роботі побудовано інтерполяційний ланцюговий дріб типу Ерміта з одним двократним вузлом. Побудований дріб типу Ерміта задовільняє інтерполяційним умовам, не залежить від напрямків диференціювання, єдиний. Проілюстровано побудову такого дробу Ерміта для часткового випадку.

Список використаної літератури

1. Михальчук Б.Р. Інтерполяція нелінійних функціоналів за допомогою інтегральних ланцюгових дробів / Б.Р. Михальчук // Укр. мат. журн. — 1999. —Т. 51.№ 3.— С. 364 — 375.
2. Макаров В.Л. Новий клас інтерполяційних інтегральних ланцюгових дробів / В.Л. Макаров, І.І. Демків // Доп. НАН України. — 2008. —№ 11.— С. 17 – 23.
3. Демків І.І. Інтерполяційні інтегральні ланцюгові дроби, що не вимагають правила підстановки / І.І. Демків // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка / Київський національний університет імені Тараса Шевченка. (Фізико-математичні науки). — 2011. —№ 4.— С. 125-132.