

## НЕЛІНІЙНІ ВЛАСТИВОСТІ ПІСКОВИКУ ПІД ДІЄЮ РЕЗОНАНСНОГО НАВАНТАЖЕННЯ

*Запропонована замкнута система рівнянь, яка описує низку виняткових ефектів, що проявляються в гірських породах під дією резонансного навантаження. Зокрема, ми моделюємо: гістерезисну поведінку резонансної кривої; лінійне зменшення резонансної частоти зі зростанням рівня навантаження; поступове (майже логарифмічне) відновлення резонансної частоти після значного динамічного навантаження; релаксацію амплітуди відгуку для незмінної частоти. Запропонована модель дозволила нам зробити прогноз відносно динамічної реалізації пам'яті про кінцеву точку. Теоретичні прогнози були підтверджені експериментами в Лос Аламоській Національній лабораторії.*

*Ключові слова: пісковик, резонансне навантаження, нелінійні властивості.*

В.А. ВАХНЕНКО

Інститут геофізики ім. С.І. Субботіна НАН України, Київ, Україна

## НЕЛИНЕЙНЫЕ СВОЙСТВА ПЕСЧАНИКА ПРИ РЕЗОНАНСНОЙ НАГРУЗКЕ

*Предложена замкнутая система уравнений для описания необычных эффектов в горных породах при резонансной нагрузке. Мы моделируем: гистерезисное поведение резонансной кривой; линейный сдвиг резонансной частоты при увеличении нагрузки; постепенное (почти логарифмическое) восстановление резонансной частоты после значительной динамической нагрузки; релаксацию амплитуды отклика для неизменной частоты. Предложенная модель позволила нам сделать прогноз относительно динамической реализации памяти про конечную точку. Теоретические прогнозы были подтверждены экспериментами в Лос Аламоськой Национальной лаборатории.*

*Ключевые слова: песчаник, резонансная нагрузка, нелинейные свойства.*

V.O. VAKHNENKO

Subbotin Institute of Geophysics, Kyiv, Ukraine

## NONLINEAR PROPERTIES OF SANDSTONE UNDER RESONANCE LOADING

*The system of equations to describe the set of effects in rocks under resonance loading is suggested. In particular, we model: hysteretic behavior of resonance curve; the linear shift of the resonance peak under increase of loading; the gradual (almost logarithmic) recovery of resonant frequency after high drive level; the relaxation changes of amplitude at fixed frequency. The suggested model enables us to predict the dynamic realization of hysteresis with end-point memory. These theoretical predictions have been confirmed by experimental measurements performed at the Los Alamos National Laboratory.*

*Keywords: sandstone, resonance loading, nonlinear properties.*

### Постановка проблеми

Пісковикам, на відміну від звичайних статичних властивостей, притаманна низка виняткових і навіть незвичних динамічних властивостей [1-4]. Як показує низка експериментальних результатів щодо нелінійного резонансного відгуку в пісковіку під дією вимушених коливань, нелінійні властивості з'являються навіть при надзвичайно малих динамічних напруженнях [1-4]. Найбільшою нелінійною особливістю, що інтригує, являється повільна динаміка. Звісно, динамічні експерименти містять більше інформації, ніж квазістатичні. Однак, опис динамічних процесів і, зокрема, знаходження рівняння стану середовища, є значно складнішою проблемою.

### Основна частина

Для експериментального дослідження резонансної поведінки стрижня пісковіку широко використовується схема, в якій з одного торця зразка (в даному випадку пісковіку Береа довжиною ~35см) прикладене періодичне навантаження, що генерується датчиком тиску, а з іншого торця зразка знаходиться датчик прискорення, за допомогою якого фіксується амплітудно-частотна характеристика. Рівняння еволюції поля повздовжніх зміщень  $u$ , що відповідає такій схемі експерименту, записується у вигляді

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial (\partial^2 u / \partial x \partial t)} \right]. \quad (1)$$

Дисипативна функція  $\mathfrak{S} = (\gamma/2)[\partial^2 u / \partial x \partial t]^2$  відповідальна за внутрішнє тертя. Величини  $\rho$  і  $\gamma$  – усереднена щільність пісковика і коефіцієнт внутрішнього тертя, відповідно. Співвідношення між напруженням та деформацією вибирається у такому вигляді

$$\sigma = \frac{E \operatorname{sech} \eta}{(r-a) [\cosh \eta \partial u / \partial x + 1]^{a+1}} - \frac{E \operatorname{sech} \eta}{(r-a) [\cosh \eta \partial u / \partial x + 1]^{r+1}}, \quad (2)$$

яке при  $r > a > 0$  дозволяє блокувати стисливість зразка пісковика при деформаціях  $\partial u / \partial x$ , що прямують до  $+0 - \operatorname{sech} \eta$ . Параметри  $\cosh \eta, r, a$  визначають нелінійне відхилення співвідношення напруження-деформація від закону Гука. Головний ефект, як ми вважаємо, проявляється через лінійне зниження модуля Юнга з концентрацією дефектів  $E = (1 - c/c_{cr})E_+$ . Тут  $c_{cr}$  і  $E_+$  – критична концентрація дефектів і максимально можливе значення модуля Юнга, відповідно. Згідно з Косевичем [5] рівноважна концентрація дефектів, яка пов'язується з напруженням  $\sigma$ , задається співвідношенням

$$c_\sigma = c_0 \exp(\nu \sigma / kT). \quad (3)$$

Параметр  $\nu > 0$  позначає типовий об'єм, який утримує одиничний дефект. При відсутності напруження рівноважна концентрація дефектів буде  $c_0$ . Хоч формула (3) повинна, за загальною думкою, бути придатною до ансамблю мікроскопічних дефектів у кристалічних решітках, все ж вона є також обґрунтованою в межах термодинаміки континуумів, яка не потребує будь-якого характерного розміру структури кристалічної матриці [5]. З цієї причини ми вважаємо, що залежність (3) повинна також виконуватися для ансамблю мезоскопічних дефектів за умови, що окремий дефект ми повинні розуміти як розлом між гранулами.

Для досягнення прийнятної відповідності між теорією і експериментом, ми використовуємо поняття змішаної кінетики, що знаходить фізичне пояснення для консолідованих матеріалів. Ми описуємо концентрацію дефектів  $c$  кінетичним рівнянням

$$\partial c / \partial t = -[\mu \theta(c - c_\sigma) + \nu \theta(c_\sigma - c)](c - c_\sigma). \quad (4)$$

Тут  $\mu = \mu_0 \exp(-U/kT)$  і  $\nu = \nu_0 \exp(-W/kT)$  – швидкості анігіляції і утворення дефектів, відповідно. Швидкість  $\nu_0$  визначається швидкими осциляціями нерозірваних зв'язків, в той час, як швидкість  $\mu_0$  визначається повільними вібраціями вільних пошкоджених зв'язків. Значна відмінність  $\nu_0 \gg \mu_0$  між цими швидкостями в дійсності досягає декількох порядків і веде також до значної відмінності між  $\nu \gg \mu$ . Це забезпечує фізичний механізм, який руйнує симетрію відгуку системи до зовнішнього навантаження, і відіграє роль, подібну до храпового механізму або діоду.

Типові експерименти по резонуючому відгуку зразка пісковика при вимушеному збуренні [2-4] відповідають таким граничним та початковим умовам

$$u(x=0|t) = D(t) \cos(\varphi + \int_0^t d\tau \omega(\tau)), \quad u(x=L|t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x|t=0) = 0, \\ \sigma(x=L|t) + \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}(x=L|t) = 0, \quad g(x|t=0) = c_0. \quad (5)$$

Тут  $L$  – довжина стрижня,  $D(t)$  – керуюча амплітуда.

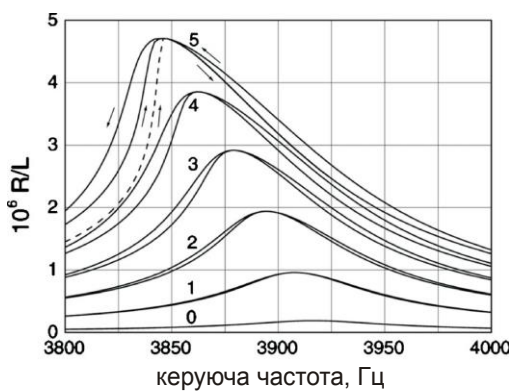


Рис. 1. Розрахункові резонансні криві  $j = 0 \dots 5$  при амплітудах  $D_j/L = 3.8(j + 0.5\delta_{j0}) \cdot 10^{-8}$ .

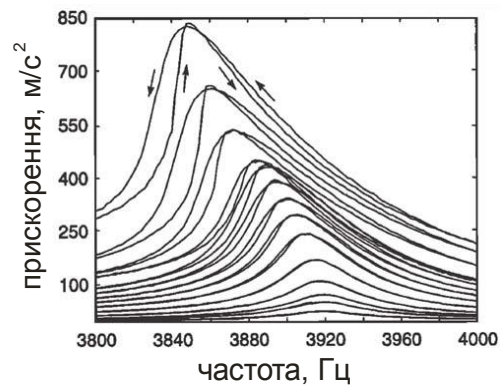


Рис. 2. Експериментальні резонансні криві з [3].

Комп'ютерне моделювання нелінійних ефектів і ефектів повільної динаміки було виконане в околі другої резонуючої частоти. Рис. 1 показує типові резонансні криві, тобто залежність амплітуди  $R$  на торці  $x = L$  від керуючої частоти  $f = \omega/2\pi$  при високих керуючих амплітудах  $D$ . Час, за який частота пробігає в інтервалі 370–4100Hz вперед і назад, складає 120 с. Суцільні лінії відповідають резонансним кривим у кондиційованому стані. Пунктирна лінія ілюструє криву для некондиційованого стану, тобто за умови відсутності будь-якої попередньої накачки. Стрілки на трьох найвищих кривих вказують на напрямки зміни частоти. Заради визначеності результати комп'ютерного розрахунку були узгоджені з експериментами ТенКейта і Шенкланда [3]. Значення параметрів можна знайти в [6,7]. Рис. 2 дозволяє порівняти наведені розрахункові результати (див. рис. 1) з експериментом [3].

Експериментальні результати релаксації амплітуди прискорення при незмінній частоті [3] показують, як пісковик поступово втрачає пам'ять найвищого рівня навантаження (див. рис. 4). Рис. 3 показує теоретичні криві релаксації, які відтворюють головні ознаки експерименту [3] (див. рис. 4). Розраховуючи резонансні криві при протяжці частоти вгору чи вниз, ми зупинили протяжку в часі  $t_s$  (накачка зберігається) і підраховали амплітуду відгуку  $R$ , як функції часу  $t - t_s$ . Як і в експериментах, змодельована амплітуда поступово зменшується для випадку, коли частота, на якій була зупинка, нижча, ніж резонансна частота (рис. 3a і 3b) і, навпаки, збільшується для випадку, коли частота, на якій була зупинка, вища (див. рис. 3c і 3d). Крім того, після приблизно десяти хвилин релаксації для фіксованої частоти властивості зразка наближаються до рівня, який відповідає некондиційованому стану зразка, безвідносно відбувається протяжка частоти вгору чи вниз.

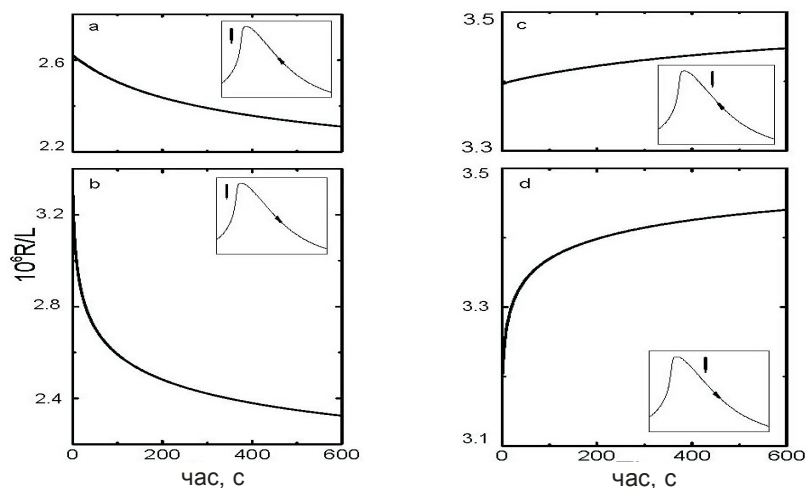


Рис. 3. Амплітуди відгуку  $R$  для амплітуди  $D = 1.9 \cdot 10^{-7} L$  (a), (b) – зупинка на частоті  $f_s = 3825\text{Hz}$ , (c), (d) – зупинка на частоті  $f_s = 3900\text{Hz}$ .

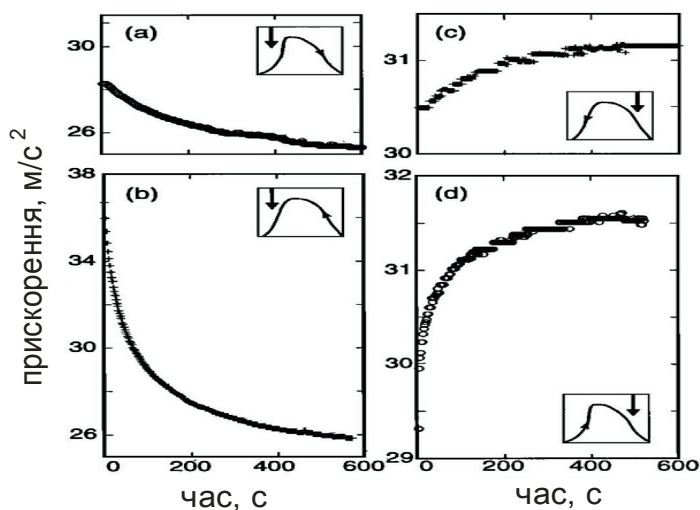


Рис. 4. Експериментальні дані з [3], що моделювалися (див. рис. 3).

На рис. 5 (теорія) та рис. 6 (експеримент з [4]) показано поступове відновлення резонуючої частоти  $f_r$  до максимально можливого значення  $f_0$  після того, як зразок був оброблений високоамплітудною накачкою, а потім накачку зупинили. Вклад у повний зсув резонансної частоти  $f_r - f_0$  вносять два різних фізичних процеси. Перша складова – традиційний динамічний зсув, який зумовлений нелінійністю напруження для високих рівнів збудження, друга складова – зсув, який зумовлений ефектом повільної динаміки. Однак, тільки друга складова може дійсно бути зареєстрована протягом процесу відновлення, тому що перша зникає майже миттєво, коли високоамплітудна накачка змінюється на низькоамплітудну. Таким чином, повний характер відновлення повинен неминуче підпорядковуватися повільній кінетиці, яка відповідає за відновлення міжзернових зв'язків [4, 8]. Запропоноване кінетичне рівняння (5) разом з прийнятним співвідношенням між модулем Юнга і концентрацією дефектів дають досить широкий інтервал часу логарифмічного відновлення резонансної частоти у повній відповідності до експериментальних результатів [4].

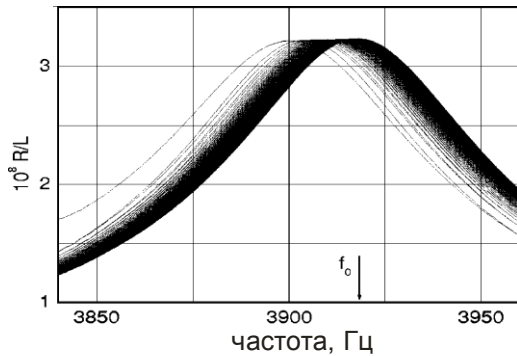


Рис. 5. Набір резонансних кривих після того, як була призупинена високоамплітудна накачка.

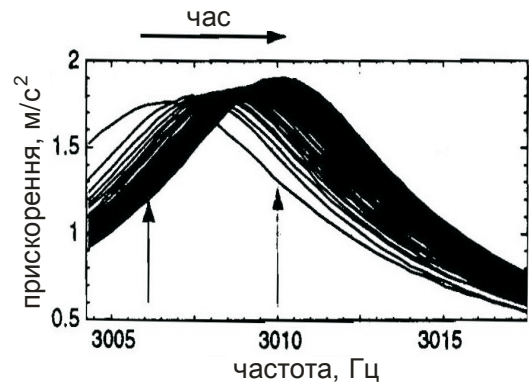


Рис. 6. Експериментальні результати з [4], що показують ефект повільної динаміки.

Розглянемо ефект запам'ятовування кінцевої точки у випадку резонансного навантаження. Рис. 1 демонструє динамічну реалізацію явища гістерезису у випадку тільки двох точок повернення в протоколі керуючої частоти. Виникає питання: чи міг би ефект, який подібний до запам'ятовування кінцевої точки і спостерігається в квазістатичних експериментах [9, 10], проявитися також в експериментах з резонансу.

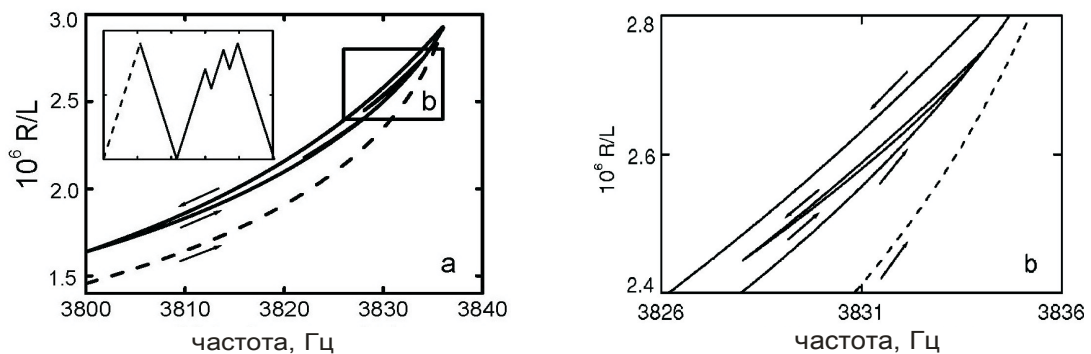


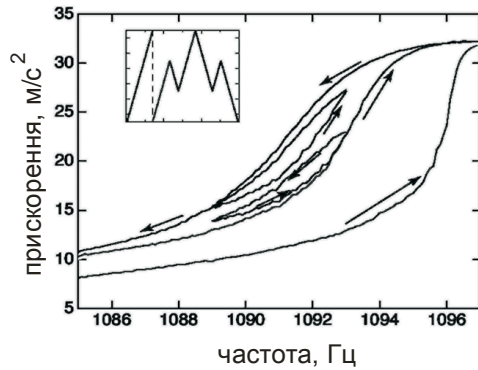
Рис. 7. Ефект пам'яті кінцевої точки в динамічному відгуку. Протокол навантаження наведено всередині лівого рисунка

### Висновки

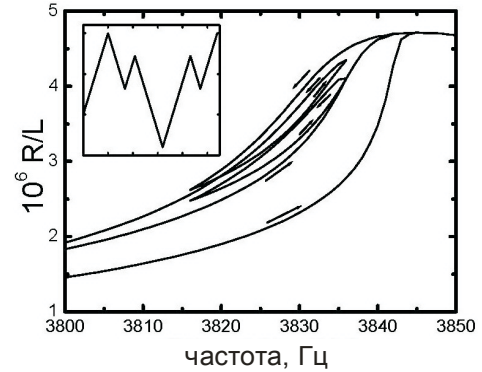
Ми вивчили цю проблему теоретично. Результат показано на рис. 7. Пам'ять про кінцеву точку, яка визначається тут, як пам'ять про попередню максимальну амплітуду перемінного навантаження, розглядається в формі малих петель всередині великої петлі. Початкові і кінцеві точки кожної малої петлі на рис. 7 збігаються, що є типовим проявом запам'ятовування кінцевої точки. Таким чином, ми передбачили явище гістерезису з пам'яттю про кінцеву точку по суті в динамічному навантаженні [7]. Відповідно до теоретичних результатів (рис. 7) наші колеги Тен Кейт та Шенкланд з Лос Аламоської Національної лабораторії провели експериментальні вимірювання з метою перевірки (чи спростування) нашого передбачення. В якості зразка був вибраний пісковик Фонтеблоу. Рівень деформації в максимальній точці при протяжці частоти складав приблизно  $2 \cdot 10^{-6}$ . Рис. 8 показує низькочастотну половину резонансних кривих, які відповідають частотному протоколу, що додається всередині рис. 8. Ми чітко бачимо, що початок і кінець кожного внутрішнього циклу збігаються, тобто, головна властивість пам'яті про кінцеву точку підтверджується. Ці експерименти були простимульовані нашими теоретичними прогнозами і, як

виявилось, підтверджують наші передбачення.

Більш того, наведені ексклюзивні експериментальні результати, які одержані з Лос Аламоса, підштовхнули, в свою чергу, нас до проведення додаткових досліджень. Експерименти для пісковика Фонтблору (рис. 8) моделювалися системою рівнянь (1)-(5), включаючи рівняння стану з константами, які притаманні для пісковика Берей [6, 7]. Розрахункові криві для низькочастотних гілок резонансних кривих наведені на рис. 9. Спостерігаємо якісну узгодженість між експериментальними (рис. 8) і теоретичними кривими (рис. 9).



**Рис. 8.** Низькочастотні гілки експериментальних резонансних кривих для пісковика Фонтблору. Протокол навантаження наведено всередині рисунка.



**Рис. 9.** Моделювання ефекту пам'яті про кінцеву точку в динамічній реалізації. Протокол навантаження наведено всередині рисунка.

### Список використаної літератури

1. Guyer, R.A. Nonlinear mesoscopic elasticity: the complex behaviour of rocks, soil, concrete / R.A. Guyer, P.A. Johnson. – Weinheim: Wiley-VCH Verlag GmbH and Co. KGaA, 2009. – 395 p.
2. Johnson P.A. Resonance and nonlinear elastic phenomena in rock / P.A. Johnson, B. Zinsner, P.N.J. Rasolofosaon // J. Geophys. Res. B. – 1996. – № 101. – PP. 11553–11564.
3. TenCate J.A. Slow dynamics in the nonlinear elastic response of Berea sandstone / J.A. TenCate, T.J. Shankland // Geophys. Res. Lett. – 1996. – № 23. – P. 3019–3022.
4. TenCate J.A. Slow dynamics and nonlinear response at low strains in Berea sandstone / J.A. TenCate, T.J. Shankland // Proceedings of the 16th International Congress on Acoustics and 135th Meeting of the Acoustical Society of America, edited by P.A. Kuhl and L.A. Crum. – New York: American Institute of Physics, 1998. – № 3. – PP. 1565–1566.
5. Косевич А.М. Физическая механика реальных кристаллов / А.М. Косевич. – К.: Наукова думка. – 1981. – 328 с.
6. Vakhnenko O.O. Strain-induced kinetics of intergrain defects as the mechanism of slow dynamics in the nonlinear resonant response of humid sandstone bars / O.O. Vakhnenko, V.O. Vakhnenko, J.A. TenCate, T.J. Shankland // Phys. Rev. E. – 2004. – № 70. – PP. 015602(4).
7. Vakhnenko O.O. Soft-ratchet modelling of end-point memory in the nonlinear resonant response of sedimentary rocks / O.O. Vakhnenko, V.O. Vakhnenko, J.A. TenCate, T.J. Shankland // Phys. Rev. B. – 2005. – № 71. – P. 174103(14).
8. TenCate J.A. Universal slow dynamics in granular solids / J.A. TenCate, E. Smith E., R.A. Guyer // Phys. Rev. Lett. – 2000. – № 85. – PP. 1020–1024.
9. Guyer R.A. Quantitative implementation of Preisach-Mayergoyz space to find static and dynamic elastic moduli in rock / R.A. Guyer, K.R. McCall, G.N. Boitnott, L.B.Jr. Hilbert, T.J. Plona // J. Geophys. Res. – 1997. – № 102. – PP. 5281–5293.
10. Darling T.W. Neutron diffraction study of the contribution of grain contacts to nonlinear stress-strain behaviour / T.W. Darling, J.A. TenCate, D.W. Brown, B. Clausen, S.C. Vogel // Geophys. Res. Lett. – 2004. – № 31. – L. 16604.