УДК 532.593

А.П. ГОРОВЕНКО
Інститут геофізики НАН У

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИФРАКЦІЇ ХВИЛІ ТИСКУ НА ПРУЖНОМУ ВКЛЮЧЕННІ В ПРУЖНІЙ МАТРИЦІ

Отримано розв'язок задачі дифракції хвилі тиску в вигляді рядів за сферичними функціями та поліномами Лежандра. Розраховано амплітуди дифрагованих хвиль для різних пружних матеріалів включення і матриці.

Ключові слова: дифракція хвилі, ряди за сферичними функціями.

А.П. ГОРОВЕНКО.
Институт геофизики НАН У

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИФРАКЦИИ ВОЛНЫ ДАВЛЕНИЯ НА УПРУГОМ ВКЛЮЧЕНИИ В УПРУГОЙ МАТРИЦЕ

Получено решение задачи дифракции волны давления в виде рядов по сферическим функциям и полиномам Лежандра. Рассчитаны амплитуды дифрагированных волн для различных упругих материалов включения и матрицы.

Ключевые слова: дифракция волны, ряды по сферическим функциям.

A.P. GOROVENKO
Instityt geophysical Acad.Science of Ukraine

THE MATHEMATICAL MODELING AT DIFFRACTION WAVE A PRESSURE ON ELASTIC INCLUSION IN ELACTIC MATRIX

The solution of the problem of pressure wave diffraction as rows of spherical functions and Legendre polynomials is obtained. Amplitudes of diffracted waves for different elastic materials of inclusion and matrix are calculated.

Keywords: wave diffraction, rows of spherical functions.

Постановка проблеми

Дифракція хвилі тиску на пружному включенні в пружній матриці має важливе наукове та прикладне значення, зокрема в материалознавстві та для ряду задач геофізики.

Аналіз останніх досліджень та публікацій

Дослідженню явища дифракції хвилі на включенні в пружному середовищі присвячено ряд робіт,зокрема,[1]-[4]; отримані результати відносяться, як правило, до далекої зони і відрізняються між собою, що потребує подальших досліджень.

Формулювання цілі дослідження

Виконати комп'ютерні розрахунки амплітуди дифрагованої хвилі тиску в залежності від частоти хвилі. Дослідження провести в широкому діапазоні значень густин та швидкостей хвиль в різних пружних середовищах включення та матриці; розглянути хвилі у включенні в ближній та далекій зонах.

Виклад основного матеріалу дослідження

Отже, нехай на сферу радіусом a, розташовану в пружному середовищі набігає плоска акустична хвиля тиску $\tilde{p}_1 = p\exp(ik_1 r\cos\theta + \omega t)$, де r, θ – координати точки, відраховані від центра сфери.

Згідно з теоремою Гельмгольца переміщення $\vec{u}$ може бути записане у вигляді суми скалярної та векторної функцій

$$\vec{u} = -\nabla\Phi + \nabla x\vec{\sigma}\,, \tag{1}$$

де Φ – скалярний потенціал, $\vec{\sigma}$ – векторний потенціал.

Скалярний потенціал Φ пов'язують з поздовжніми хвилями тиску, а векторний потенціал $\vec{\sigma}$ використовують при розгляді поперечних хвиль зсуву.

Векторний потенціал $\vec{\sigma}$ може бути представлений через скалярні функції Ψ, χ (потенціали Дебая)

$$\vec{\sigma} = \nabla x \vec{r} \Psi + \nabla x (\nabla x \vec{r} \chi). \tag{2}$$

Скалярні функції Φ, Ψ, χ задовольняють скалярним рівнянням Гельмгольца

$$\left[\nabla^2 + \begin{pmatrix} k_p^2 \\ K_S^2 \\ K_t^2 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} \Phi \\ \Psi \\ \chi \end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{pmatrix} p - \text{хвиля} \\ s - \text{хвиля} \\ t - \text{хвиля} \end{pmatrix}, \tag{3}$$

де постійні розповсюдження $k_p = \omega/V_p$, $K_S = \omega/V_S$, це хвильові числа для поздовжньої та поперечної хвиль, відповідно. Швидкості розповсюдження хвиль $V_p^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho$, $V_S^2 = \mu/\rho$, де λ , μ – параметри Ляме, ρ – густина.

Введемо позначення: i – падаюча хвиля, S – розсіяна хвиля, f – хвиля всередині пори.

Зовнішня хвиля тиску, яка падає на включення може бути записана в сферичній системі координат у вигляді

$$\Phi_i = \sum_{m=0}^{\infty} (-i)^m (2m+1) j_m(k_1 r) \mathrm{Y}_m(\cos\theta), \tag{4}$$
$$\Psi_i = 0,$$

де $j_m(x)$ – сферична функція Бесселя, $\mathrm{Y}_m(\cos\theta)$ – поліноми Лежандра.

На неоднорідності (включенні) має місце трансформація поздовжньої p-хвилі в поперечну S-хвилю. В матриці будуть p та S хвилі з потенціалами

$$\begin{pmatrix} \Phi_s \\ \Psi_s \end{pmatrix} = \sum_{m=0}^{\infty} \begin{pmatrix} A_m \ h_m \ (k_1 r) \\ B_m \ h_m \ (K_1 r) \end{pmatrix} \mathrm{Y}_m(\cos\theta), \tag{5}$$

де $h_m^{(2)}(x)$ – сферична функція Ганкеля другого роду,

$$h_m^{(2)}(x) = j_m(x) - i N_m(x), \tag{6}$$

де $j_m(x)$ – сферична функція Бесселя, $N_m(x)$ – сферична функція Неймана.

Всередині включення хвиля тиску має потенціал

$$\Phi_f = \sum_{m=0}^{\infty} C_m j_m(k_2 r) \mathrm{Y}_m(\cos\theta). \tag{7}$$

Завдяки трансформації хвилі тиску на неоднорідності в пружному включенні існує хвиля зсуву

$$\Psi_f = \sum_{m=0}^{\infty} D_m j_m(K_2 r) \mathrm{Y}_m(\cos\theta). \tag{8}$$

Коефіцієнти розвинення в ряди A_m, B_m, C_m, D_m визначаються з граничних умов на поверхні включення $(r = a)$. Наведемо граничні умови для $r = a$

1. Неперервність переміщень

$$u_r^{(1)} = u_r^{(2)}, \text{ тобто } u_{ri} + u_{rs} = u_{rf}, \tag{9}$$

$$u_{\theta}^{(1)} = u_{\theta}^{(2)}, \text{ тобто } u_{\theta i} + u_{\theta s} = u_{\theta f} . \quad (10)$$

2. Неперервність компонент тензора напружень

$$\tau_{r}^{(1)} = \tau_{r}^{(2)}, \text{ тобто } \tau_{ri} + \tau_{rs} = \tau_{rf} , \quad (11)$$

$$\tau_{\theta}^{(1)} = \tau_{\theta}^{(2)}, \text{ тобто } \tau_{\theta i} + \tau_{\theta s} = \tau_{\theta f} . \quad (12)$$

Використовуючи рівняння теорії пружності та рівняння (4)-(12) знайдемо $u_{ri}, u_{rs}, u_{rf}, u_{\theta i}, u_{\theta s}, u_{\theta f}, \tau_{ri}, \tau_{rs}, \tau_{rf}, \tau_{\theta i}, \tau_{\theta s}, \tau_{\theta f}$, підставимо ці величини в граничні умови і визначимо коефіцієнти розкладу в ряди A_m, B_m, C_m, D_m.

Аргументом досліджуваних функцій була величина ka, де k – хвильове число, a – радіус включення. Величина k дорівнює $2\pi\nu / V_p$, де ν – частота в Гц, V_p – швидкість хвилі тиску в середовищі. Частота ν дорівнює $\Delta\nu \cdot i$, де $\Delta\nu$ крок по частоті, i – ціле число від 1 до $i_{\max}$. Введемо позначення $\nu^* = \nu / \Delta\nu$, далі по осі абсцис буде величина ν^*. По осі ординат нормована амплітудна функція – f / a.

Далі розглянемо два випадки коли параметри матриці більші від параметрів включення і навпаки.

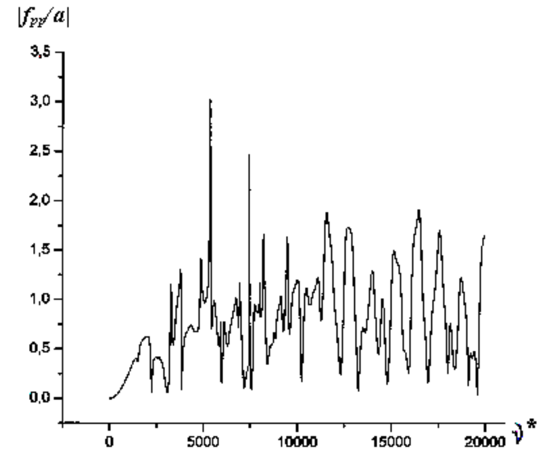

Рис. 1. Дифрагована хвиля тиску в далекій зоні, матриця алюміній, включення епоксид, $a = 0{,}01$.

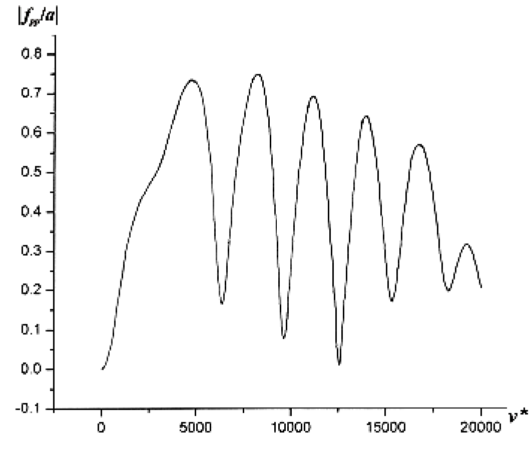

Рис. 2. Далека зона, залежність амплітудної функції від частоти, матриця епоксид, включення алюміній, a =0,01

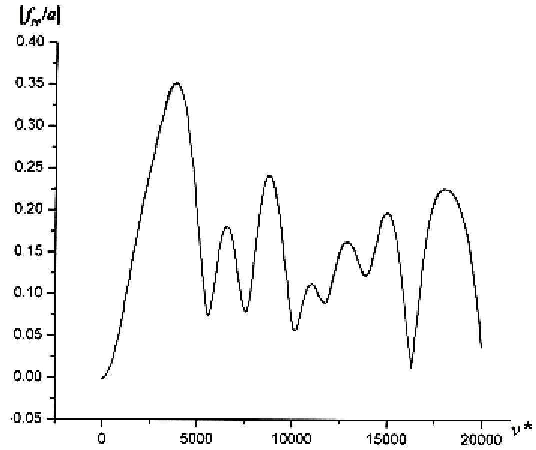

Рис. 3. Далека зона, залежність амплітудної функції від частоти, матриця вапняк, включення граніт, a =0,01.

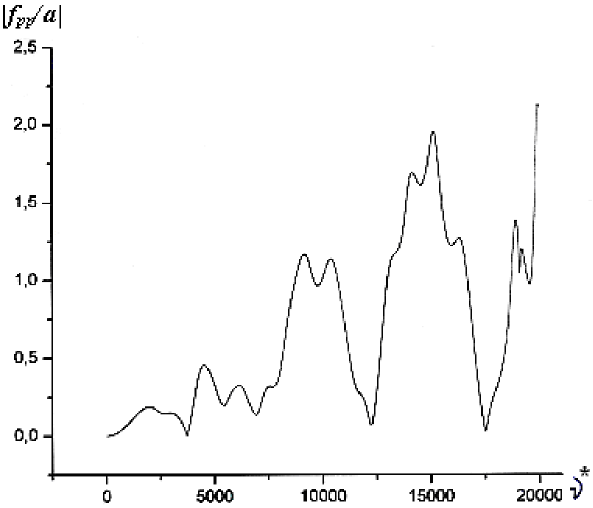

Рис. 4. Залежність амплітудної функції від частоти,матриця граніт, включення вапняк, a =0,01.

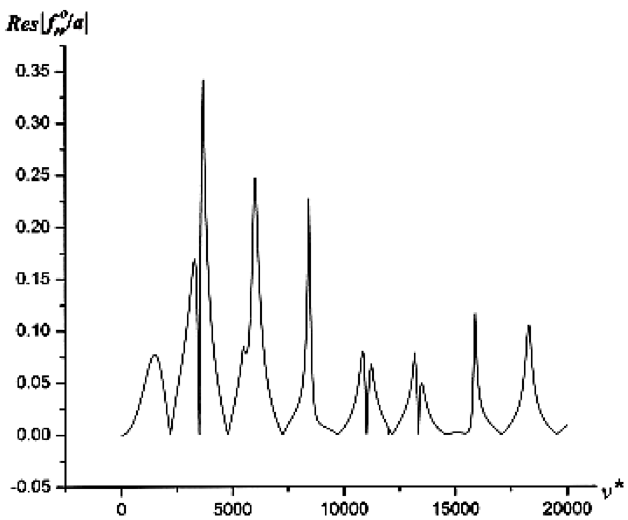

Рис. 5. Резонансна поведінка гармоніки m = 0 хвилі тиску в матриці, матриця алюміній, включення епоксид.

Висновки

1. Розглянуто точний розв'язок задачі дифракції хвилі тиску пружним включенням в пружній матриці. Розв'язок представлений відповідними рядами по сферичним функціям Бесселя, Неймана, Ганкеля, поліномам Лежандра. Розроблений алгоритм та створена програма для комп'ютерних розрахунків амплітуди дифрагованої хвилі в залежності від частоти хвилі для різних пружних середовищ.
2. Внаслідок трансформації на включенні хвилі тиску в хвилю зсуву, в матриці та в включенні існують хвилі тиску та хвилі зсуву.
3. Для прикладних задач геофізики та матеріалознавства виконані розрахунки амплітуд дифрагованих хвиль для різних пружних середовищ: граніт, вапняк, сталь, алюміній, епоксид. Форма та амплітуда дифрагованих хвиль тиску в матриці суттєво залежать від пружних властивостей матриці та включення. Для матриць з великими значенннями густин та швидкостей, в порівнянні із значеннями цих величин у включенні, має місце складна залежність амплітудної функції від частоти з багатьма вузькими піками. І навпаки, коли параметри матриці малі порівняно з включенням, має місце декілька широких піків. Гармоніки дифрагованої хвилі тиску мають резонансну поведінку. Резонанси вузькі для матриці з великими значеннями фізичних параметрів, і навпаки, мають місце широкі резонанси для матриці з малими значеннями параметрів порівняно з параметрами включення. Для хвилі зсуву в матриці характерні високі значення амплітуди в області низьких частот. Гармоніки хвиль зсуву мають резонансну поведінку в залежності від частоти, резонанси вузькі, або широкі, в залежності від того, більші чи менші параметри матриці по відношенню до параметрів включення.
4. Розподіл амплітуд хвиль тиску та зсуву у включенні має неоднорідний характер в залежності від радіальної координати r. По формі резонанси хвиль тиску та зсуву у включенні для $r\sim a$ близькі до форми резонансів в матриці. Частота відповідних резонансів в матриці та в включенні однакова. У включенні амплітуда резонансів вища від амплітуди відповідних резонансів в матриці.

Список використаної літератури

1. Olen M.A Scattering of compressional waves by a rigid spheroidal inclusion / M.A. Olen, Y.H. Pao // J. Appl.Mech. – 1973. – V. 40.– PP.1073–1077.
2. Gaunaurd G.C. Theory of resonant scattering from spherical cavities in elastic and viscoelastic media / G.C. Gaunaurd, H. Uberall // JASA. – 1978. – V. 63.– PP.1699–1712.
3. Brill D.G. The response surface in elastic wave scattering / D.G. Brill, G.C. Gaunaurd, H. Uberall // J. Appl.Phys. – 1981. – V. 52. – PP. 3205–3214.
4. Горовенко А.П. Дифракція хвилі тиску на пружному сферичному включенні в пружному середовищі / А.П. Горовенко. – К.: ІГФ НАНУ, 2014. – 34 с. – (Препринт ІГФ НАНУ).