УДК 534.21

А.П КОВАЛЕНКО.
Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПЕРЕХОДНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В СИСТЕМЕ ОБОЛОЧКА ВРАЩЕНИЯ-ЖИДКОСТЬ

Построена математическая модель исследования нестационарных переходных динамических процессов в системе оболочка вращения жидкость при продольных динамических нагружениях.

Ключевые слова: *оболочка вращения, жидкость, продольное динамическое нагружение.*

А.П КОВАЛЕНКО
Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ДОСЛІДЖЕННЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ ПЕРЕХІДНИХ ДИНАМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ В СИСТЕМІ ОБОЛОНКА ОБЕРТАННЯ-РІДИНА

Побудована математична модель дослідження нестаціонарних перехідних динамічних процесів в системі оболонка обертання рідина при поздовжніх динамічних навантаженнях.

Ключові слова: *оболонка обертання, рідина, поздовжнє динамічне навантаження.*

A.P KOVALENKO
S.P.Timoshenko Institute of Mechanics of NAS of Ukraine

MATHEMATICAL MODEL OF STUDYING NONSTATIONAR THE TRANSITION DYNAMICAL PROCECCES IN SYSTEM SHELL OF REVOLUTION-LIQUID

Mathematical model of studying nonstationar the transition dynamical procecces in system cover of revolv-liquid longitunal dynamic loading is building.

Keywords: *shell of revolution,liquid, longitunal dynamic loading.*

Постановка проблемы

В разного типа технических устройствах зачастую используются механические системы которые можно рассматривать как оболочки вращения с жидкостью. Часто такие системы подвергаются динамическим продольным наружениияим (железнодорожные цистерны, бочкообразные конструкции и т.п.). Математическое моделирование таких гидроупругих систем может снизить аварийность и позволит более тщательно учитывать взаимодействие элементов таких систем при продольных ударных нагружениях.

Анализ последних исследований и публикаций

Исследования в этой области проводятся на протяжении последних десятилетий. В работах рассматриваются, как правило, цилиндрические оболочки с жидкостью [1-5]. Одной из распространенных является модель типа Тимошенко для оболочки и рассмотрение жидкости в акустическом приближении. Рассматриваются задачи как в нелинейной, так и в линейной постановке. Для исследования переходных процессов зачастую достаточно ограничиться линейной постановкой задачи. Анализ публикаций показывает, что приемлемую точность решения дают приближенные методы решения задачи о переходных процессах в оболочке с жидкостью в линейной постановке и рассмотрение жидкости в акустическом приближении [6–8].

Формулирование цели исследования

Целью работы является построение математической модели для исследования переходных процессов в механических системах оболочка вращения-жидкость при продольном динамическом нагружении.

Изложение основного материала исследования

Рассматривается упругая тонкостенная оболочка вращения с жидкостью. Вводится цилиндрическая система координат x', r', θ, причем ось x' направлена по оси симметрии оболочки с началом на торце оболочки $x' = 0$, l' - длина оболочки, $r' = f'(x')$ - уравнение медианы срединной поверхности вращения оболочки. На срединной поверхности оболочки введена система ортогональных криволинейных координат α_1, α_2 таким образом, что линия $r' = f'(x')$ совпадает с линией $\alpha_2 = const$. Следовательно, в каждой точке срединной поверхности заданы базисные векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$, причем $\vec{e}_1$ направим по касательной к линии $\alpha_2 = const$. Единичный вектор $\vec{n}$ направим по внешней нормали к плоскости, образованной ортами $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$.

Давление жидкости в состоянии покоя и давление с наружной стороны равны между собой и имеют значение P_0. В сечениях $x' = 0$ и $x' = l'$ находятся жесткие пластины, препятствующие вытеканию жидкости, определенным образом закрепленные на торцах оболочки. Предположим, что торец $x' = 0$ оболочки свободен, а торец $x' = l'$ определенным образом закреплен или свободен.

Конечной целью исследований является изучение переходных процессов в системе. Поэтому необходимо выбирать такие модели для оболочки и жидкости, которые в состоянии описывать распространение волновых возмущений. Для описания движения оболочки используются уравнения типа Тимошенко в перемещениях [9]. Для описания закона движения жидкости – уравнения Навье-Стокса [10].

Вектор полного перемещения оболочки $\vec{\Phi}$ в точке $P(\alpha_1, \alpha_2, z)$ примем, как обычно, по сдвиговой модели Тимошенко [9] в виде $\vec{\Phi} = \vec{F} + z\vec{\gamma}$, где $\vec{F} = \vec{e}_1 U_1' + \vec{e}_2 U_2' + \vec{n} W'$ – вектор перемещений срединной поверхности; $\vec{\gamma} = \vec{e}_1\gamma_1 + \vec{e}_2\gamma_2$ – вектор угла поворота нормального элемента; z – координата, отсчитываемая вдоль направления, обозначенного ортом $\vec{n}$. Рассматривается осесимметричное движение. В этом случае $U_2' = \gamma_1 = 0$. Явный вид дифференциальных операторов теории упругих оболочек типа Тимошенко можно получить из общего случая уравнения движения произвольной оболочки [9]. В работе [11] показана применимость приближенных теорий оболочек при исследовании переходных процессов.

Тогда задача об исследовании переходных процессов в изучаемой системе оболочка-жидкость сведется к решению следующей системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned} L_1\left(U_1', W', \gamma_2\right) - \rho_1 h' \frac{\partial^2 U_1'}{\partial t'^2} &= g_1, \\ L_2\left(U_1', W', \gamma_2\right) - \rho_1 h' \frac{\partial^2 W'}{\partial t'^2} &= \left(P - P_0\right) + g_2, \\ L_3\left(U_1', W', \gamma_2\right) - \frac{\rho_1 h'^3}{12} \frac{\partial^2 \gamma_2}{\partial t'^2} &= g_3, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \overrightarrow{V'}}{\partial t'} + \left(\overrightarrow{V'} grad \overrightarrow{V'}\right) = \vec{Q} - \frac{gradP}{\rho} + \frac{\mu graddiv\overrightarrow{V'}}{3\rho} + \frac{\mu \Delta \overrightarrow{V'}}{\rho}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t'} + div \rho \overrightarrow{V'} = 0, \quad (3)$$

$$\Omega\left(P, \rho\right) = 0. \quad (4)$$

Здесь (1) уравнения движения упругой оболочки вращения в перемещениях [9] с учетом напряжений на внутренних стенках, вызванных наличием вязкой жидкости и внешнего давления P_0 [10]. Уравнение (2) уравнение движения вязкой слабосжимаемой изотропной жидкости в векторной форме [10]. Уравнения (3) и (4) суть уравнения неразрывности для жидкости [10] и уравнения состояния жидкости [10,12]. Неизвестными функциями в этих уравнениях являются $U_1', W', \gamma_2, \overrightarrow{V'}, \rho, P$.

В уравнениях (1) (4) приняты следующие обозначения: ρ_1, h' – плотность материала и толщина стенки оболочки; P – давление в жидкости; g_i $(i = \overline{1,3})$ функции, зависящие от параметров жидкости, которые учитывают напряжение на внутренних стенках оболочки (при отсутствии вязкости $\mu = 0, g_i = 0, (i = \overline{1,3})$); $\overrightarrow{V'}$ – вектор скорости частиц жидкости; $\vec{Q}$ – вектор массовой силы, отнесенный к единице массы жидкости; ρ, μ – плотность и коэффициент жидкости, Δ – оператор Лапласа в пространстве, занятом жидкостью.

В уравнениях (1) $L_i\left(U_1', W', \gamma_2\right)$ $(i = \overline{1,3})$ – известные дифференциальные операторы теории упругих оболочек типа Тимошенко. Явный вид этих операторов можно получить из общего случая уравнений движения произвольной оболочки, полученных К.З.Галимовым [9]. Эти операторы в тензорных обозначениях имеют вид:

$$L_1\left(U_1',W',\gamma_2\right)=\nabla_i T^{i1}-b_i^1 N^i,$$
$$L_2\left(U_1',W',\gamma_2\right)=\nabla_i N^i-b_{ik}T^{ik}, \qquad (5)$$
$$L_3\left(U_1',W',\gamma_2\right)=\nabla_i M^{i2}-N^2.$$

Здесь ∇_i $(i=1,2)$ – символ ковариантного дифференцирования относительно ковариантных компонент метрического тензора срединной поверхности оболочки a_{ik};

$$\nabla_k \mathrm{N}^i=\frac{\partial N^i}{\partial a^k}+\Gamma^i_{kj}\mathrm{N}^j,\ \nabla_j \mathrm{T}^{ik}=\frac{\partial T^{ik}}{\partial a^j}+\mathrm{T}^{sk}\Gamma^i_{js}+T^{is}\Gamma^k_{js}, \qquad (6)$$

где Γ^j_{ik} – символы Кристофеля.

В (5) величины T^{ik}, N^i, M^{ik} $(i,k=1,2)$ выражаются через перемещения, согласно [9], следующим образом :

$$T^{ik}=\frac{1}{2}KE^{iksj}(e_{js}+e_{sj}),$$
$$M^{ik}=\frac{1}{2}DE^{iksj}\left(\Omega_{js}+Q_{sj}\right), \qquad (7)$$
$$N^i=\frac{1-\nu}{8K(i)}(\omega^i+\gamma^i),$$

где $e_{ik}=\nabla_i U_k'-b_{ik}W'$, $\Omega_{ik}=\nabla_i\gamma_k$, $\omega_i=\nabla_i W'+b_i^k U_k'$. (8)

Здесь $K=\dfrac{Eh}{1-\nu^2}$, $D=\dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$, $E^{ikjs}=a^{ij}a^{ks}+\nu c^{ij}c^{ks}$, E,ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала оболочки соответственно; $K(i)$ $(i=\overline{1,3})$ – постоянные коэффициенты поперечных сдвигов и обжатия; a^{ik} – контравариантные компоненты первого метрического тензора срединной поверхности оболочки; b_{ik}, b_i^k – ковариантные и смешанные компоненты второго метрического тензора; c^{ik} – контравариантные компоненты дискриминантного тензора S [9].

Подставив (7) с учетом (8) и (6) в (5) получим конкретный вид дифференциальных операторов $L_i\left(U_1',W',\gamma_2\right)$ $(i=\overline{1,3})$. К системе уравнений (1)-(4) необходимо присоединить начальные и граничные условия.

Согласно принятому выше предположению, в начальный момент система оболочка-жидкость находится в состоянии покоя. В этом случае начальные условия запишутся в следующем виде. При $t'=0$

$$U_1'=\frac{\partial U_1'}{\partial t'}=W'=\frac{\partial W'}{\partial t'}=\gamma_2=\frac{\partial\gamma_2}{\partial t'}=0,\ \overrightarrow{V'}=0,\ \rho=\rho_0,\ P=P_0. \qquad (9)$$

В выражении (9) ρ_0 плотность жидкости в состоянии покоя.

Из условия совместного движения оболочки и прилегающих к ней частиц жидкости получаем условие непроницаемости оболочки [13]:

при $x'=0,l$: $V_{x'}'=\dfrac{\partial U_{x'}'}{\partial t'}$; при $r'=f'(x')$: $V_n'=\dfrac{\partial W'}{\partial t'}$. (10)

Из условия отсутствия разрыва между жидкостью и стенкой оболочки получаем:

при $r'=f'(x')$: $V_{\alpha_1}'=\dfrac{\partial U_1'}{\partial t'}$. (11)

В (10) и (11) приняты следующие обозначения: $U'_{x'}$ – проекция вектора перемещений оболочки Φ на ось Ox'; $V'_{x'}, V'_n, V'_{\alpha_1}$ – составляющие вектора скорости частиц жидкости по координате x', направлению внешней нормали $\vec{n}$ и по направлению координаты α_1 соответственно.

В выражениях (10) и (11), как это принято в теории тонких упругих оболочек [9,14], произведен “снос” граничных условий с боковой поверхности $r' = f'(x') - \frac{h}{2}$ на срединную поверхность $r' = f'(x')$.

Граничным условием для продольного смещения оболочки является уравнение движения пластины, закрепленной на торце $x' = 0$ с учетом внешней силы, напряжения оболочки в сечении $x' = 0$ и силы давления жидкости в сечении $x' = 0$:

$$\text{при } x' = 0: \; m\frac{\partial^2 U'_{x'}}{\partial t'^2} = F(t') + F_{об}(t') + F_{ж}(t'). \tag{12}$$

Здесь $F_{об}(t') = 2\pi f'_{(0)} h'_{x'} \sigma_{x'}(0,t'),\; F_{ж}(t') = -2\pi \int\limits_0^{f'_{(0)}} (P - P_0) r' dr'$, масса жесткой пластины, $\sigma_{x'}(x',t')$ проекция напряжения в оболочке на ось Ox'.

К граничным условиям (10)-(12) необходимо присоединить граничные условия, зависящие от формы оболочки и ее закрепления [15]:

$$M_n\left(U'_1, W', \gamma_2\right) = 0 \;\; (n = 1, 2, ...). \tag{13}$$

В выражении (13) $M_n\left(U'_1, W', \gamma_2\right)$ – некоторые дифференциальные операторы на граничных линиях срединной поверхности. Вид операторов $M_n\left(U'_1, W', \gamma_2\right)$ и их число определяются в каждом конкретном случае формой оболочки и характером ее закрепления в пространстве.

Выводы

Таким образом, задача об исследовании динамических процессов в системе оболочка вращения-жидкость сводится к совместному решению начально-краевой задачи (1)-(4), (9)-(13). Решение такой задачи в данной постановке представляет значительные трудности, обусловленные наличием ряда факторов, в том числе нелинейностью уравнений. Поэтому представляется возможным линеализировать и применить аналитико-численные методы, позволяющие с приемлемой точностью находить решение задачи [3,6-8].

Список использованной литературы

1. Алумяэ Н.А. Переходные процессы деформации упругих оболочек и пластинок / Н.А. Алумяэ // Труды VI Всес.конф. по теории оболочек и пластинок. – М.: Наука, 1966. – С. 883–889.
2. Мовсисян Л.А. Продольный удар по цилиндрической оболочке. / Л.А. Мовсисян // Изв. АН Арм. ССР. Физ мат науки.– 1964. – Т.17. – №5. – С. 43–46.
3. Нигул У.К. О применимости приближенных теорий при переходных процессах деформации круговых цилиндрических оболочек./ У.К. Нигул //Тр. VI Всес.конф. по теории оболочек и пластинок.– М.: Наука, 1966. – С. 593–599.
4. Сагомонян А.Я. Осевой удар цилиндрической оболочки о жесткую плоскость / А.Я.Сагомонян // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1973. –№2. – С. 173–176.
5. Кубенко В.Д. Нестационарное взаимодействие элементов конструкций со средой./ В.Д. Кубенко. – Киев.: Наук.думка, 1979. – 184 с.
6. Коваленко А.П. Исследование практической сходимости метода итераций при математическом моделировании динамических процессов в цилиндрической оболочке / А.П. Коваленко //Вестник Херсонского национального технического университета. – 2008.– Вып. 2(31). – С. 240–244.
7. Коваленко А.П. Исследование практической сходимости численного обращения преобразования Лапласа-Карсона при математическом моделировании динамических процессов в цилиндрической оболочке / А.П. Коваленко // Вестник Херсонского национального технического университета. – 2009. –Вып. 2 (35). – С. 236-240.
8. Коваленко А.П. О применимости интегрального преобразования Лапласа-Карсона при математическом моделировании переходных процессов в цилиндрических оболочках / А.П. Коваленко // Вестник Херсонского национального технического университета. – 2010. – Вып. 3(39). – С. 213-217.

9. Галимов К.З. Основы нелинейной теории тонких оболочек. // Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1975. – 326 с.
10. Седов Л.И. Механика сплошной среды. М.: Наука, 1976. – Т.1. – 535 с.
11. Нигул У.К. О применимости приближенных теорий при переходных процессах деформации круговых цилиндрических оболочек./ У.К. Нигул // Тр. VI Всес. конф. по теории оболочек и пластинок.– М.: Наука, 1966. – С. 593–599.
12. Голубева О.В. Курс механики сплошных сред. М.: Высшая школа, 1972. 368 с.
13. Ильгамов М.А. Граничные условия на поверхности контакта оболочки с жидкостью в эйлерово-лагранжевой форме.В кн.: Тр. Х всесоюзн. конф. по теории оболочек и пластин. Кутаиси,1975.- Тбилиси: Мецниераба, 1975, С. 170-180.
14. Слепян Л.И. Нестационарные упругие волны. Л.:Судостроение, 1972. 374 с.
15. Григолюк Э.И., Селезов И.Т. Механика твердых деформируемых тел. Т.5 М.: ВИНИТИ, 1973. – 272 с.