

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ПОВЕРХОНЬ ЗА ДОПОМОГОЮ БАЗИСНОГО БИКУБИЧНОГО СПЛАЙНА

Дана стаття містить викладки методу побудови інтерполяційної моделі поверхні по рівномірному кроці інтерполяції за допомогою бікубічного інтерполяційного базисного сплайна. Є набір значень точок на поверхні по наперед заданій інтерполяційній сітці, необхідно побудувати інтерполяційну поверхню. Вказано алгоритм побудови даної моделі поверхні за допомогою бікубічного базисного сплайна з використанням різних граничних умов.

Ключові слова: сплайн, бікубічний базисний сплайн, інтерполяція, інтерполяційна поверхня.

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ С ПОМОЩЬЮ БАЗИСНОГО БИКУБИЧЕСКОГО СПЛАЙНА

Данная статья содержит изложения метода построения интерполяционной модели поверхности по равномерному шагу интерполяции с помощью бикубического интерполяционного базисного сплайна. Есть набор значений точек на поверхности по заранее заданной интерполяционной сетке, необходимо построить интерполяционную поверхность. Указан алгоритм построения данной модели поверхности с помощью бикубического базисного сплайна с использованием различных предельных условий.

Ключевые слова: сплайн, бикубический базисный сплайн, интерполяция, интерполяционная поверхность.

SURFACE INTERPOLATION USING BASIS BICUBIC SPLINE

This article contains a summary of the method of constructing the interpolation model of the surface in a uniform step using bicubic spline interpolation base. There is a set of values of points on the surface of a predetermined interpolation grid, it is necessary to construct an interpolation surface. An algorithm for constructing the model surface using bicubic spline base using different boundary conditions.

Keywords: spline, basis bicubic spline interpolation, interpolation surface.

Постановка проблеми

Актуальність вивчення, дослідження та застосування багатовимірних сплайн-функцій зумовлена високою ефективністю і точністю сплайнів при розв'язуванні задач інтерполяції та апроксимації в задачах математичного моделювання. При достатньо повному науковому дослідженні сплайнів на сьогодні залишаються не достатньо вивченими методи побудови та застосування багатовимірних, зокрема дво- і тривимірних базисних сплайн-функцій. Одним із найважливіших моментів удосконалення засобів і форм розв'язання задач багатовимірної інтерполяції та математичного моделювання є формування ефективного математичного апарату, заснованого на покращенні і спрощенні методів сплайн-функцій, які вже зарекомендували себе як один із найточніших способів наближення.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Протягом останніх років дослідженнями сплайнів та розв'язанням різноманітних задач з допомогою сплайн-функцій займалися багато як зарубіжних, так і українських вчених. Було проведено багато досліджень методів сплайн-функцій на предмет їх застосування до розв'язування задач інтерполяції та математичного моделювання різноманітних процесів. В роботі Приставки О.П. «Дослідження двовимірного сплайна на основі В-сплайнів п'ятого порядку» [2] проведено дослідження двовимірних поліноміальних сплайнів на основі В-сплайнів п'ятого порядку. Зеленський А.С. описав методіку автоматизованого оконтурення рудних тіл з використанням В-сплайнів [1]. Стеблянюк П.О. в своїх працях [3,4] запропонував новий підхід до розв'язування задачі для циліндричної оболонки обертання зі змінною жорсткістю, застосовуючи напружені сплайни, а також представив новий варіант методу розв'язку нестационарних двовимірних задач термоупругопластичності за допомогою сплайн-функцій.

Мета дослідження

Необхідно перевірити можливість використання бікубічного базисного сплайна для інтерполяції поверхні заданої множиною її точок та представити метод побудови інтерполяційної моделі даної поверхні за допомогою бікубічного базисного сплайна, розглянувши можливість використання граничних умов другого порядку. А також проаналізувати величину можливої похибки при інтерполяції запропонованим методом.

Основна частина

Нехай задана поверхня W . Побудуємо її інтерполяційну поверхню за допомогою базисного бікубічного сплайна по наперед заданих значеннях.

Здамося рівномірною сіткою з 16-ма вузлами: $\Delta : [x_i; y_j]$, де $x_i = i \cdot h_1, y_j = j \cdot h_2, (i, j = 0;1;2;3)$, а h_1, h_2 – крок сітки розбиття і, оскільки маємо рівномірну сітку, то $h = h_1 = h_2 = \frac{1}{3}$ (на малюнку 1 позначено блакитним кольором). Для побудови інтерполяційного бікубічного сплайна знадобиться ще додаткові 20 вузлів по краях заданої сітки (позначені хрестиком) (мал. 1), щоб можна було застосувати граничні умови.

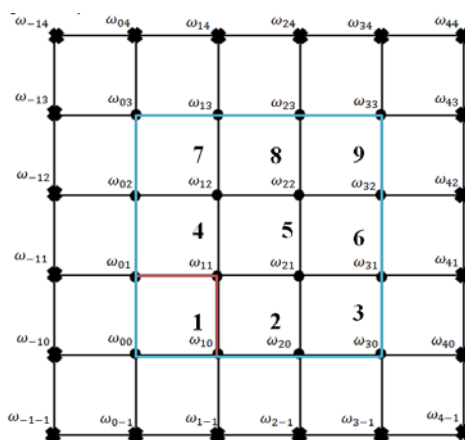


Рис. 1 Рівномірна сітка розбиття Δ (в кожній точці вказане відповідне значення на поверхні ω_{ij})

Інтерполюватимемо наперед задану поверхню по даному розбиттю. Точки $\omega_{ij} = z(x_i; y_j)$ ($i, j = -1;0;1;2;3;4$) – точки цієї поверхні. Утворимо інтерполяційну поверхню як лінійну комбінацію базисних бікубічних сплайнів. Побудова базисного бікубічного сплайну запропонована в статті «Побудова та аналіз стикування поверхонь, побудованих за допомогою двовимірних сплайн-функцій» [5].

Маємо базисний бікубічний сплайн

$$S_{ij} = \sum_{n,k=0}^3 c_{nk} \xi^n \eta^k, \text{ де } \xi = x - x_i, \eta = y - y_j (i, j = 0;1;2;3). \quad (1)$$

Для побудови наближення поверхні, що відповідає одному квадрату заданої сітки розбиття, називатимемо його сектором інтерполяції (на малюнку 1 перший сектор позначено червоним кольором та одиницею), знадобиться l базисних сплайнів, які задаються формулою (1), лінійна комбінація яких і утворить інтерполяційну поверхню, в залежності від розташування сегмента інтерполяції число l дорівнюватиме 4 – для крайніх нижніх та крайніх верхніх сегментів, тобто кутових (на малюнку 1 позначено цифрами 1, 3, 7 та 9), або 6 – для крайніх середніх сегментів (на малюнку 1 позначено цифрами 2, 4, 6 та 8), або 9 – для середнього сегмента (на малюнку 1 позначено цифрою 5).

Отже по даному розбиттю необхідно інтерполювати дев'ять секторів, для кожного з яких знадобиться різна кількість, а саме 4, 6 або 9 базисних бікубічних сплайнів, щоб утворити лінійну комбінацію. Необхідно зауважити, що всього по даному розбиттю буде 9 різних бікубічних базисних сплайнів. Якби сітка розбиття мала більше секторів, то в залежності від їх розташування для інтерполяції кожного з них необхідна була б відповідна кількість базисних сплайнів, тобто для крайніх кутових по 4, для крайніх, але не кутових – 6, а для решти, тих, що знаходяться в середині розбиття по 9. Оскільки базисний сплайн складається із дев'яти частин чотирьох типів, що описано в статті Стеблянка П.О. [3]. В цьому випадку можна обмежитися даною кількістю рівнянь і для кожного сектора інтерполяції розв'язувати

окрему систему рівнянь, в кожній з яких кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих, а отже їх можна розв'язати одним із методів розв'язування СЛР.

Перейдемо до побудови системи рівнянь, розв'язавши яку знайдемо коефіцієнти лінійної комбінації, що утворює інтерполяційний сплайн заданої поверхні:

$$W(x; y) = \sum_{i,j=0}^3 a_{ij} \cdot S_{ij}(x; y) \quad (2)$$

Кожній заданій точці поверхні відповідає своя кількість базисних бікубічних сплайнів, лінійна комбінація яких і утворюватиме інтерполяційну поверхню.

Використання граничних умов

Утворимо систему для знаходження коефіцієнтів лінійної комбінації базисних сплайнів (2), що утворює інтерполяційну поверхню.

$$\left\{ \begin{aligned} \omega_{00} &= \sum_{j=-1}^1 \sum_{i=-1}^1 a_{ij} \cdot S_{ij}(0;0); & \omega_{10} &= \sum_{j=-1}^1 \sum_{i=0}^2 a_{ij} \cdot S_{ij}\left(\frac{1}{3};0\right); & \omega_{20} &= \sum_{j=-1}^1 \sum_{i=1}^3 a_{ij} \cdot S_{ij}\left(\frac{2}{3};0\right); \\ \omega_{30} &= \sum_{j=-1}^1 \sum_{i=2}^4 a_{ij} \cdot S_{ij}(1;0); & \omega_{01} &= \sum_{j=0}^2 \sum_{i=-1}^1 a_{ij} \cdot S_{ij}\left(0;\frac{1}{3}\right); & \omega_{11} &= \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^2 a_{ij} \cdot S_{ij}\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right); \\ \omega_{21} &= \sum_{j=0}^2 \sum_{i=1}^3 a_{ij} \cdot S_{ij}\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right); & \omega_{31} &= \sum_{j=0}^2 \sum_{i=2}^4 a_{ij} \cdot S_{ij}\left(1;\frac{1}{3}\right); & \omega_{02} &= \sum_{j=1}^3 \sum_{i=-1}^1 a_{ij} \cdot S_{ij}\left(0;\frac{2}{3}\right); \\ \omega_{12} &= \sum_{j=1}^3 \sum_{i=0}^2 a_{ij} \cdot S_{ij}\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right); & \omega_{22} &= \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 a_{ij} \cdot S_{ij}\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right); & \omega_{32} &= \sum_{j=1}^3 \sum_{i=2}^4 a_{ij} \cdot S_{ij}\left(1;\frac{2}{3}\right); \\ \omega_{03} &= \sum_{j=2}^4 \sum_{i=-1}^1 a_{ij} \cdot S_{ij}(0;1); & \omega_{13} &= \sum_{j=2}^4 \sum_{i=0}^2 a_{ij} \cdot S_{ij}\left(\frac{1}{3};1\right); \\ \omega_{23} &= \sum_{j=2}^4 \sum_{i=1}^3 a_{ij} \cdot S_{ij}\left(\frac{2}{3};1\right); & \omega_{33} &= \sum_{j=2}^4 \sum_{i=2}^4 a_{ij} \cdot S_{ij}(1;1); \end{aligned} \right. \quad (3)$$

Дана система містить 16 рівнянь і 36 невідомих. Для того щоб її можна було однозначно розв'язати, використаємо граничні умови в крайніх точках заданої поверхні. Всього необхідно ще 20 рівнянь. Отже будемо використовувати крайові умови другого роду. Значення похідних другого порядку в крайніх точках, порахуємо використовуючи метод Ейлера, причому у точках (0;0), (0;1), (1;0), (1;1) візьмемо похідні другого порядку по змінних x і y , а також мішані похідні, тобто кожна вершина дасть по три рівняння, а це ще 12 рівнянь, решта 8 необхідних рівнянь задається використавши відповідні крайові умови в точках $\left(0;\frac{1}{3}\right), \left(0;\frac{2}{3}\right), \left(1;\frac{1}{3}\right), \left(1;\frac{2}{3}\right), \left(\frac{1}{3};0\right), \left(\frac{2}{3};0\right), \left(\frac{1}{3};1\right), \left(\frac{2}{3};1\right)$. Скористаємося методом Ейлера і знайдемо значення похідних другого порядку в цих точках:

$$\left\{ \begin{aligned} z''_{xx}(0;0) &= \frac{\omega_{20} - 3\omega_{00} + 2\omega_{-10}}{4h^2}; & z''_{yy}(0;0) &= \frac{\omega_{02} - 3\omega_{00} + 2\omega_{0-1}}{4h^2}; & z''_{xy}(0;0) &= \frac{\omega_{11} - \omega_{1-1} - \omega_{-11} + \omega_{-1-1}}{4h^2}; \\ z''_{xx}(0;1) &= \frac{\omega_{23} - 3\omega_{03} + 2\omega_{-13}}{4h^2}; & z''_{yy}(0;1) &= \frac{2\omega_{04} - 3\omega_{03} + \omega_{01}}{4h^2}; & z''_{xy}(0;1) &= \frac{\omega_{14} - \omega_{-14} - \omega_{12} + \omega_{-12}}{4h^2}; \\ z''_{xx}(1;0) &= \frac{2\omega_{40} - 3\omega_{30} + \omega_{10}}{4h^2}; & z''_{yy}(1;0) &= \frac{\omega_{32} - 3\omega_{30} + 2\omega_{3-1}}{4h^2}; & z''_{xy}(1;0) &= \frac{\omega_{41} - \omega_{4-1} - \omega_{21} + \omega_{2-1}}{4h^2}; \\ z''_{xx}(1;1) &= \frac{2\omega_{43} - 3\omega_{33} + \omega_{13}}{4h^2}; & z''_{yy}(1;1) &= \frac{2\omega_{34} - 3\omega_{33} + \omega_{31}}{4h^2}; & z''_{xy}(1;1) &= \frac{\omega_{44} - \omega_{42} - \omega_{24} + \omega_{22}}{4h^2}; \\ z''_{xx}\left(0;\frac{1}{3}\right) &= \frac{\omega_{21} - 3\omega_{01} + 2\omega_{-11}}{4h^2}; & z''_{xx}\left(0;\frac{2}{3}\right) &= \frac{\omega_{22} - 3\omega_{02} + 2\omega_{-12}}{4h^2}; \\ z''_{xx}\left(1;\frac{1}{3}\right) &= \frac{2\omega_{41} - 3\omega_{31} + \omega_{11}}{4h^2}; & z''_{xx}\left(1;\frac{2}{3}\right) &= \frac{2\omega_{42} - 3\omega_{32} + \omega_{12}}{4h^2}; \end{aligned} \right. \quad (4)$$

$$z''_{yy}\left(\frac{1}{3};0\right) = \frac{\omega_{12} - 3\omega_{10} + 2\omega_{1-1}}{4h^2}; \quad z''_{yy}\left(\frac{2}{3};0\right) = \frac{\omega_{22} - 3\omega_{20} + 2\omega_{2-1}}{4h^2};$$

$$z''_{yy}\left(\frac{1}{3};1\right) = \frac{2\omega_{14} - 3\omega_{13} + \omega_{11}}{4h^2}; \quad z''_{yy}\left(\frac{2}{3};1\right) = \frac{2\omega_{24} - 3\omega_{23} + \omega_{21}}{4h^2}.$$

Використаємо числові значення похідних (4), щоб доповнити систему рівнянь (3) ще 20-ма рівняннями, які відповідають крайовим умовам другого порядку.

$$\left\{ \begin{aligned} z''_{xx}(0;0) &= \sum_{i=-1}^1 \sum_{j=-1}^1 a_{ij} S''_{ij}(0;0)_{xx}; \quad z''_{yy}(0;0) = \sum_{i=-1}^1 \sum_{j=-1}^1 a_{ij} S''_{ij}(0;0)_{yy}; \quad z''_{xy}(0;0) = \sum_{i=-1}^1 \sum_{j=-1}^1 a_{ij} S''_{ij}(0;0)_{xy}; \\ z''_{xx}(0;1) &= \sum_{i=-1}^1 \sum_{j=2}^4 a_{ij} S''_{ij}(0;1)_{xx}; \quad z''_{yy}(0;1) = \sum_{i=-1}^1 \sum_{j=2}^4 a_{ij} S''_{ij}(0;1)_{yy}; \quad z''_{xy}(0;1) = \sum_{i=-1}^1 \sum_{j=2}^4 a_{ij} S''_{ij}(0;1)_{xy}; \\ z''_{xx}(1;0) &= \sum_{i=2}^4 \sum_{j=-1}^1 a_{ij} S''_{ij}(1;0)_{xx}; \quad z''_{yy}(1;0) = \sum_{i=2}^4 \sum_{j=-1}^1 a_{ij} S''_{ij}(1;0)_{yy}; \quad z''_{xy}(1;0) = \sum_{i=2}^4 \sum_{j=-1}^1 a_{ij} S''_{ij}(1;0)_{xy}; \\ z''_{xx}(1;1) &= \sum_{i=2}^4 \sum_{j=2}^4 a_{ij} S''_{ij}(1;1)_{xx}; \quad z''_{yy}(1;1) = \sum_{i=2}^4 \sum_{j=2}^4 a_{ij} S''_{ij}(1;1)_{yy}; \quad z''_{xy}(1;1) = \sum_{i=2}^4 \sum_{j=2}^4 a_{ij} S''_{ij}(1;1)_{xy}; \\ z''_{xx}\left(0;\frac{1}{3}\right) &= \sum_{i=-1}^1 \sum_{j=0}^2 a_{ij} S''_{ij}\left(0;\frac{1}{3}\right)_{xx}; \quad z''_{xx}\left(0;\frac{2}{3}\right) = \sum_{i=-1}^1 \sum_{j=1}^3 a_{ij} S''_{ij}\left(0;\frac{2}{3}\right)_{xx}; \quad z''_{xx}\left(1;\frac{1}{3}\right) = \sum_{i=2}^4 \sum_{j=0}^2 a_{ij} S''_{ij}\left(1;\frac{1}{3}\right)_{xx}; \\ z''_{xx}\left(1;\frac{2}{3}\right) &= \sum_{i=2}^4 \sum_{j=1}^3 a_{ij} S''_{ij}\left(1;\frac{2}{3}\right)_{xx}; \quad z''_{yy}\left(\frac{1}{3};0\right) = \sum_{i=0}^2 \sum_{j=-1}^1 a_{ij} S''_{ij}\left(\frac{1}{3};0\right)_{yy}; \quad z''_{yy}\left(\frac{2}{3};0\right) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=-1}^1 a_{ij} S''_{ij}\left(\frac{2}{3};0\right)_{yy}; \\ z''_{yy}\left(\frac{1}{3};1\right) &= \sum_{i=0}^2 \sum_{j=2}^4 a_{ij} S''_{ij}\left(\frac{1}{3};1\right)_{yy}; \quad z''_{yy}\left(\frac{2}{3};1\right) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=2}^4 a_{ij} S''_{ij}\left(\frac{2}{3};1\right)_{yy}. \end{aligned} \right. \quad (5)$$

Система (3) доповниться системою рівнянь (5), в результаті утвориться повна система з 36-ма невідомими і 36-ма рівняннями, розв'язавши яку і отримаємо коефіцієнти a_{ij} лінійної комбінації (2), яка утворює рівняння інтерполяційної моделі заданої поверхні.

Необхідно зауважити, що за допомогою даного методу інтерполяції поверхні, з використанням бікубічного базисного сплайну, можна інтерполювати довільно задану поверхню по рівномірному розбитті не тільки в області $[0;1] \times [0;1]$, а й по довільно заданій прямокутній області $[a;b] \times [c;d]$, але використовуючи рівномірне розбиття.

Розглянемо приклад.

Для конкретності візьмемо множину точок, які лежать на сфері $x^2 + y^2 = 4$ і відповідають точкам рівномірної інтерполяційної сітки Δ :

$$\left[\left\{ 2, \frac{\sqrt{35}}{3}, \frac{4\sqrt{2}}{3}, \sqrt{3} \right\}, \left\{ \frac{\sqrt{35}}{3}, \frac{\sqrt{34}}{3}, \frac{\sqrt{31}}{3}, \frac{\sqrt{26}}{3} \right\}, \left\{ \frac{4\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{31}}{3}, \frac{2\sqrt{7}}{3}, \frac{\sqrt{23}}{3} \right\}, \left\{ \sqrt{3}, \frac{\sqrt{26}}{3}, \frac{\sqrt{23}}{3}, \sqrt{2} \right\} \right].$$

За допомогою описаного методу для побудови інтерполяційної моделі поверхні, з використанням бікубічного сплайну, побудуємо поверхню по заданих точках.

Оскільки значення задані на конкретній поверхні (сфері), то ми зможемо зробити висновки з приводу точності запропонованого методу, порівнявши отриману інтерполяційну поверхню з наперед заданою.

На малюнку 2 представлено графік заданої сфери та виділену на її фоні інтерполяційну модель поверхні побудованої по заданих точках даної сітки розбиття. (Тут також можна побачити сектори на які була розбита область інтерполяційної сітки.)

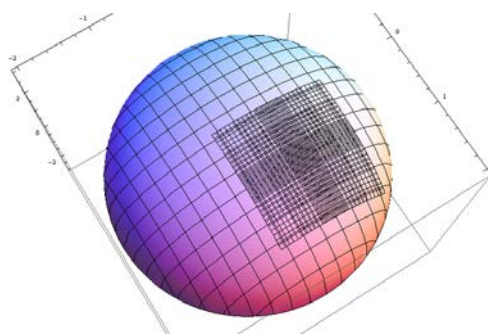
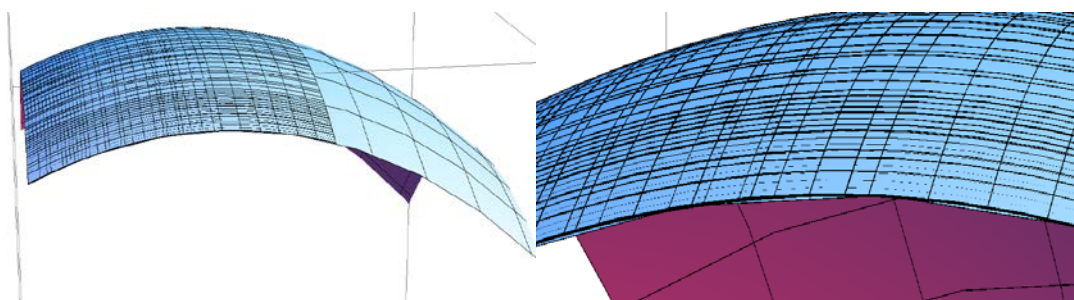


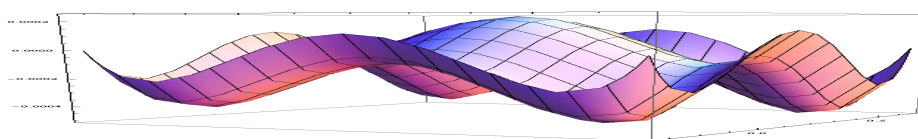
Рис. 2. Інтерполяційна модель частини поверхні на фоні заданої сфери

На малюнку 3 зображено інтерпольований сегмент на фоні сфери в розрізі між вузлами інтерполяційної сітки. Відмітимо, що при масштабному збільшенні зображення (мал. 3) можна помітити незначні розходження між сферою та її інтерполяційною моделлю, тобто має місце похибка. Спробуємо оцінити її.



Мал. 3. Інтерполяційна модель частини поверхні на фоні заданої сфери в розрізі та при масштабному збільшенні

Побудуємо графік різниці заданої функції та її інтерполяційної моделі по області $[0;1] \times [0;1]$ (мал. 4).



Мал. 4. Зображення поверхні похибки заданої інтерполяції

На малюнку 4 подано зображення поверхні похибки заданої інтерполяції, яка коливається в межах від $-0,00004$ до $0,00002$, тобто можна зробити висновок, що величина максимального розходження між заданою поверхнею та її інтерполяційним сплайном не перевищує значення $0,00004$ ($\approx 0,02\%$). Даний результат свідчить про досить високу точність запропонованого методу інтерполяції, а отже про доцільність його застосування в задачах інтерполяції та апроксимації математичного моделювання.

Висновки

Отже, використовуючи бікубічний базисний сплайн (1) можна побудувати інтерполяційну модель поверхні заданої множиною її точок, причому це можна зробити як з використанням граничних умов так і без них. Застосування граничних умов другого порядку забезпечує вищу точність інтерполяції по краях інтерполяційної поверхні, в порівнянні із методом, який не вимагає використання граничних умов. За допомогою представленого методу можна інтерполювати поверхні на будь якій прямокутній області. Інтерполяція за допомогою бікубічного сплайна має досить високу точність, в чому ми переконалися на конкретному прикладі, де величина похибки не перевищує $0,02\%$, а це свідчить про доцільність її застосування в задачах інтерполяції та апроксимації математичного моделювання.

Список використаної літератури

1. Зеленский А.С. Оконтурирование рудных тел с использованием В-сплайнов. /А.С.Зеленский, С.С.Пуханов, Т.А.Подойницына//Вісник КТУ, вип.27. К. – 2011. – с. 3-5.
2. Приставка П.О. Дослідження двовимірного сплайна на основі В-сплайнів п'ятого порядку /П.О.Приставка, О.Г. Чолишкіна // Актуальні проблеми автоматизації та інформаційних технологій: зб. наук. праць. – Д.: Вид-во Дніпропетр. ун-ту. – 2008. – Т. 12. – С. 14-27.

3. Стебляк П.О. Аналіз обчислювальної ефективності наближених методів при дослідженні нестационарного напружено-деформованого стану тіл з використанням двовимірних сплайнів / Методи розв'язування прикладних задач механіки деформованого твердого тіла: Збірник наукових праць ДНУ.- Дніпропетровськ,– 2005.– Вип.7– 73-87с.
4. Стебляк П.О. Застосування двовимірного напруженого сплайну в задачах механіки / П.О. Стебляк. Системні технології. Регіональній міжвузівський збірник наукових праць. – Випуск 5(46). Дніпропетровськ,– 2006.–17-26с.
5. Стебляк П.О. Побудова та аналіз стикування поверхонь, побудованих за допомогою двовимірних сплайн-функцій/ П.О. Стебляк, Т.В. Кравчук//Збірник наукових праць Дніпродзержинського державного технічного університету: (технічні науки): тематичний випуск «Математичні проблеми технічної механіки» / Дніпродзержинськ ДДТУ. – 2013. – В. 2(22). – с.75-82.