

**ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ С ЦЕЛЬЮ ОПРЕДЕЛЕНИЯ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ
ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМЫ ТЕЛЕСНЫХ ПРОФИЛЕЙ В ОГРАНИЧЕННОМ
ПОТОКЕ ВЯЗКОЙ СРЕДЫ**

Современные исследования начально-краевых задач механики сплошных сред базируются на создании адекватных математических моделей и построении соответствующих расчётных методов численной реализации. Данная статья посвящена представлению результатов комплексного исследования распределённых кинематических и динамических характеристик, сопровождающих процесс обтекания системы телесных профилей потоком вязкой несжимаемой жидкости на основе систематического применения метода граничных интегральных уравнений. Представлены некоторые результаты вычислительного эксперимента определения распределённых аэродинамических характеристик при обтекании системы телесных профилей ограниченным потоком вязкой несжимаемой жидкости в контрольной области.

Ключевые слова: метод граничных интегральных уравнений, вязкая несжимаемая среда, система телесных профилей, алгоритм численной реализации, аэродинамические характеристики

Ю. О. КРАШАНИЦА, ЮЕ ПЕН

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ»

**ЧИСЛОВА РЕАЛІЗАЦІЯ МЕТОДУ ГРАНИЧНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З МЕТОЮ
ВИЗНАЧЕННЯ АЕРОДИНАМІЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМИ ТІЛЕСНИХ ПРОФІЛІВ В
ОБМЕЖЕНОМУ ПОТОЦІ В'ЯЗКОГО СЕРЕДОВИЩА**

Сучасні дослідження початково-крайових задач механіки суцільних середовищ базуються на створенні адекватних математичних моделей і побудові відповідних розрахункових методів чисельної реалізації. Дана стаття присвячена представленню результатів комплексного дослідження розподілених кінематичних і динамічних характеристик, що супроводжують процес обтікання системи тілесних профілів потоком в'язкої нестисливої рідини на основі систематичного застосування методу граничних інтегральних рівнянь. Представлені деякі результати обчислювального експерименту визначення розподілених аеродинамічних характеристик при обтіканні системи тілесних профілів обмеженим потоком в'язкої нестисливої рідини в контрольній області.

Ключові слова: метод граничних інтегральних рівнянь, в'язке нестисливе середовище, система тілесних профілів, алгоритм чисельної реалізації, аеродинамічні характеристики

Y. KRASHANITSA, YUE PENG

National Aerospace University by N.E. Joukowsky «KHAU»

**NUMERICAL IMPLEMENTATION OF METHOD OF BOUNDARY INTEGRAL EQUATIONS TO
DETERMINE AERODYNAMIC CHARACTERISTICS OF PROFILE SYSTEM, CORPORAL LIMITED
FLOW OF VISCOUS MEDIA**

Modern studies of boundary value problems of continuum mechanics is based on the creation of an adequate mathematical models and computational methods for constructing the relevant numerical implementation. This article is devoted to presenting the results of a comprehensive study of distributed kinematic and dynamic characteristics that accompany the process flow of bodily profiles of a viscous incompressible fluid based on the systematic application of the method of boundary integral equations. Some results of the distributed computing experiment determining the aerodynamic characteristics in the flow of bodily profiles limited flow of viscous incompressible fluid in the control area.

Keywords: method of boundary integral equations, incompressible viscous medium bodily system profiles, numerical implementation of the algorithm, the aerodynamic characteristics.

1. Постановка задачи обтекания системы профилей вязким потоком несжимаемой жидкости в ограниченной области

Современные несущие системы летательных аппаратов широкого применения представляют собой развитую систему многоразрезных крыльев. В полной мере эффективность таких систем реализуется на режимах взлёта-посадки летательного аппарата. Причём в силу начального периода движения, скорость не превышает 40 м/с и математической моделью процессов является классическая система законов сохранения динамики вязкой несжимаемой жидкости [1]. Здесь необходимо подчеркнуть, что современные исследования проблемных и востребованных задач механики сплошных сред [2] и, в частности, аэрогидродинамики, опираются на развитые аппараты функционального и векторно-тензорного анализа [5 – 7], что в полной мере эффективно эксплуатируется и способствует развитию численных методов решения всего спектра востребованных задач аэрогидромеханики [2, 4, 5].

К сожалению, до настоящего времени не создан общий метод исследования и решения нелинейной системы дифференциальных законов сохранения механики сплошных сред даже в простейших случаях. Тем не менее, современное развитие математической физики и обобщенного векторно-тензорного анализа [5 – 8], способствуют развитию метода граничных интегральных уравнений [3] на широкий класс начально-краевых задач механики [4], и, в первую очередь, аэрогидродинамики [5], а также позволяют выходить на аналитические решения определённых классов нелинейных задач.

Представлены результаты численной реализации метода граничных интегральных уравнений с целью определения нелинейных аэродинамических характеристик при исследовании обтекания произвольной системы аэродинамических профилей телесной формы в плоской области (τ) реальным потоком несжимаемой среды (рис. 1).

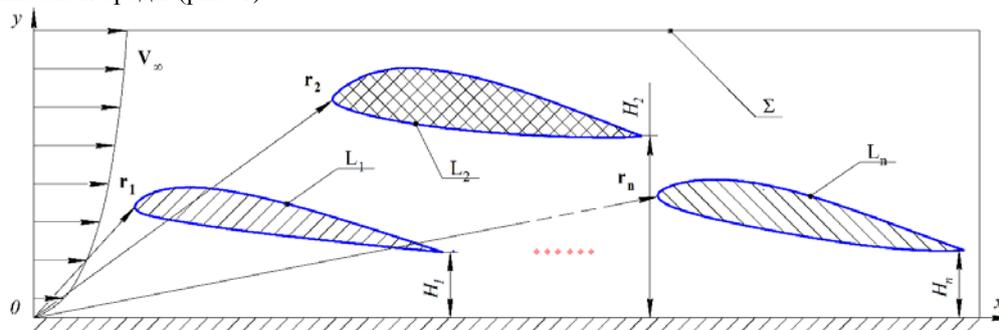


Рис. 1. Система телесных профилей в стационарном вязком потоке вблизи поверхности раздела, L_1, L_2, \dots, L_n – границы профилей; Σ – граница контрольного объема; H_1, H_2, \dots, H_n – расстояния до поверхности раздела; r_1, r_2, \dots, r_n – векторы положений профилей; V_∞ – вектор скорости набегающего завихренного потока

2. Граничные интегральные уравнения

Интегральное представление решения основной задачи векторного анализа [5] для произвольного вектора \mathbf{a} имеет вид [8]:

$$\mathbf{a} = \oint_{\Sigma L_i + \Sigma} \left\{ \left(\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial n}, \Gamma \right) + ([\mathbf{n}, [\nabla, \mathbf{a}], \Gamma]) \right\} d\sigma - \oint_{\Sigma L_i + \Sigma} \left(\mathbf{a}, \frac{\partial \Gamma}{\partial n} \right) d\sigma, \tag{1}$$

где в случае гидродинамических задач граничные значения вектора \mathbf{a} должны быть заданы, а нормальные производные этого вектора определяются потенциалами законов сохранения [5].

Из предыдущего интегрального представления решения, например, для вектора скорости \mathbf{V} , учитывая свойства интеграла Гаусса, имеем граничное интегральное уравнение относительно основных параметров взаимодействия стационарного потока вязкой несжимаемой жидкости с одним телесным профилем из системы профилей в двумерном пространстве. Здесь учитывается, что как интегрирование, так и выполнение граничных условий выполняются на границе обтекаемого i -ого профиля (L_i) и контрольной границы (Σ) (см. рис. 1):

$$\alpha \mathbf{V}(r_0) = \oint_{\sum_{i=1}^N L_i + \Sigma} \left\{ \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial n}, \Gamma \right) + ([\mathbf{n}, [\nabla, \mathbf{V}], \Gamma]) \right\} d\sigma - \oint_{\sum_{i=1}^N L_i + \Sigma} \left(\mathbf{V}, \frac{\partial \Gamma}{\partial n} \right) d\sigma, \tag{2}$$

где \mathbf{V} – векторное поле скоростей, Γ – фундаментальное решение основной задачи векторного анализа [5], N – количество профилей, \mathbf{n} – вектор нормали к конкретной границе, а коэффициент α определяется по свойствам потенциалов. Причем векторное граничное интегральное уравнение (2) в дальнейшем с целью численной реализации развито на систему скалярных граничных интегральных уравнений относительно скалярных характеристик: кинематической завихренности ω и динамического давления p .

3. Алгоритмизация численного решения системы граничных интегральных уравнений

Численная реализация определения аэродинамических характеристик методом граничных интегральных уравнений для решения плоских задач начинается с дискретизации исследуемых границ области задачи и делении её на простейшие элементы (ячейки, сетки), внутри которых физические величины считаются постоянными в соответствии с апробированными квадратурно – интерполяционными подходами. Аппроксимирующий полином одномерной ячейки:

$$x = \sum_{i=1}^2 N_i x_i \quad (3)$$

где $N_1 = \frac{1-\xi}{2}, N_2 = \frac{1+\xi}{2}$ – функции формы; ξ – координата локальной системы; x – координата глобальной системы; x_i – координаты локальных систем точек каждой ячейки.

Исходя из системы (2), используя предельные свойства интегралов типа потенциалов: $\oint_L \varphi d\sigma; \oint_L \psi d\sigma; \oint_L \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma$, где функции φ и ψ – сопряжённые гармонические функции – известные решения уравнения Лапласа – составляющие фундаментального решения основной задачи векторного анализа $\Gamma = \mathbf{I}\varphi - [\mathbf{I}, \mathbf{k}\psi]$ [8], а также с учётом векторного потенциала закона сохранения импульса [5], получаем систему алгебраических уравнений относительно искомых параметров задачи (p – давление и ω – вихрь).

$$\begin{aligned} u_{L_i} &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{\nu\rho} \sum_{k=1}^K p_k S_k^i + \sum_{k=1}^K \omega_k T_k^i \right) + \frac{3}{2} \left(-\frac{1}{\nu\rho} \sum_{m=1}^M p_m S_m^i + \sum_{m=1}^M \omega_m T_m^i \right) + \frac{3}{2} C_i; \\ v_{L_i} &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{\rho\nu} \sum_{k=1}^K p_k T_k^i - \sum_{k=1}^K \omega_k W_k^i \right) + \frac{3}{2} \left(-\frac{1}{\nu\rho} \sum_{m=1}^M p_m T_m^i - \sum_{m=1}^M \omega_m W_m^i \right) + \frac{3}{2} D_i; \\ u_{\Sigma_i} &= \frac{3}{2} \left(-\frac{1}{\nu\rho} \sum_{k=1}^K p_k S_k^i + \sum_{k=1}^K \omega_k T_k^i \right) + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{\nu\rho} \sum_{m=1}^M p_m S_m^i + \sum_{m=1}^M \omega_m T_m^i \right) + \frac{1}{2} C_i; \\ v_{\Sigma_i} &= \frac{3}{2} \left(-\frac{1}{\rho\nu} \sum_{k=1}^K p_k T_k^i - \sum_{k=1}^K \omega_k W_k^i \right) + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{\nu\rho} \sum_{m=1}^M p_m T_m^i - \sum_{m=1}^M \omega_m W_m^i \right) + \frac{1}{2} D_i. \end{aligned} \quad (4)$$

где K – число элементов на границах обтекаемых профилей (L); M – число элементов на границе контрольной области; а весовые коэффициенты подсчитаны по следующим выражениям:

$$\begin{aligned} C_i &= \sum_{m=M_2+1}^{M_3} R_m^i + \sum_{m=M_1+1}^{M_2} \left(R_m^i - \frac{1}{\nu} u_m^2 F_m^i \right) + \sum_{m=M_3+1}^M \left(R_m^i + \frac{1}{\nu} u_m^2 F_m^i \right); \\ D_i &= \sum_{m=M_2+1}^{M_3} Q_m^i + \sum_{m=M_1+1}^{M_2} \left(Q_m^i + \frac{1}{\nu} u_m^2 F_m^i \right) + \sum_{m=M_3+1}^M \left(Q_m^i - \frac{1}{\nu} u_m^2 F_m^i \right); \end{aligned}$$

$$S_j^i = n_{xj} F_j^i - n_{yj} G_j^i; T_j^i = n_{yj} F_j^i - n_{xj} G_j^i; W_j^i = n_{xj} F_j^i + n_{yj} G_j^i; R_j^i = -\frac{u_j^2}{\nu} n_{xj} F_j^i + \frac{u_j^2}{\nu} n_{yj} G_j^i - u_j H_j^i;$$

$$Q_j^i = -\frac{u_j^2}{\nu} n_{yj} F_j^i + \frac{u_j^2}{\nu} n_{xj} G_j^i - u_j H_j^i; F_j^i = \int_{a_j}^{b_j} \varphi d\sigma; G_j^i = \int_{a_j}^{b_j} \psi d\sigma; H_j^i = \int_{a_j}^{b_j} \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma.$$

4. Результаты численной реализации

Таким образом, система линейных алгебраических уравнений (4) имеет классический вид

$$\{A\} \cdot \{x\} = \{b\}, \quad (5)$$

где $\{A\}$ – матрица интегральных коэффициентов; $\{x\}$ – столбец искомых параметров: давления p и завихренности ω на границах; а $\{b\}$ – столбец известных свободных членов. Исходные данные расчётов приведены в таб.1 и 2, расположения профилей в контрольной области показаны на рис.1 и 2. Численные результаты решений представлены на рис 3 – 8 (взлёт) и рис.10 – 15 (посадка) и тестировались известными компьютерными идеологиями [9].

Таб.1. Исходные данные

Первый профиль	«А-18%»	Длина контрольной области	6 м
Второй профиль	«В-14%»	Высота контрольной области	5 м
Третий профиль	«РН-12%»	Количества элементов на границе каждого профиля	60
Скорость набегающего потока	40 м/с	Количества элементов на границе контрольной области	60
Число Рейнольдса	1000		

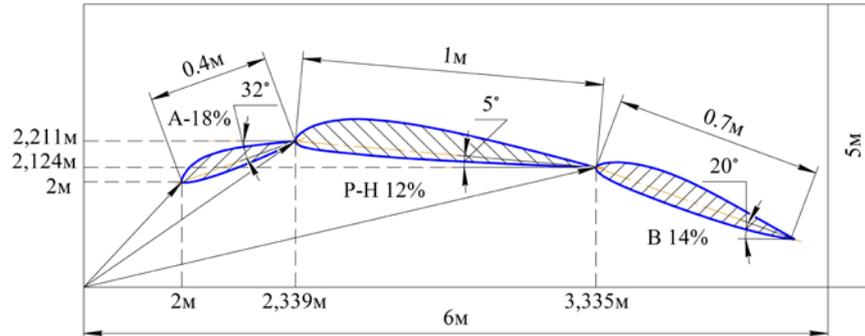


Рис. 2. Расположение системы телесных профилей «А-18%», «В-14%» и «РН-12%». Режим взлета

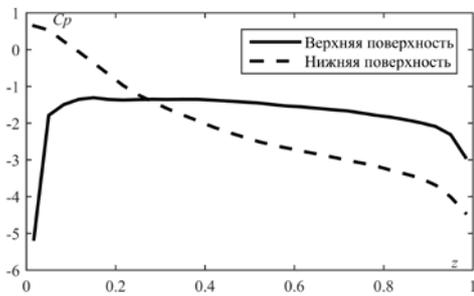


Рис.3. Распределение давлений на границе первого профиля - предкрылок

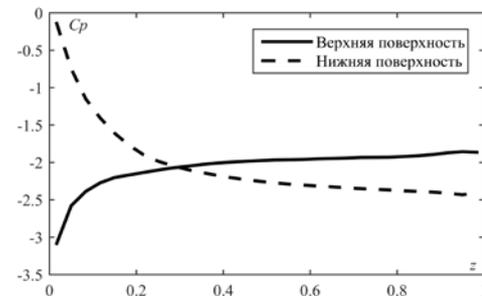


Рис.4. Распределение давлений на границе второго несущего профиля

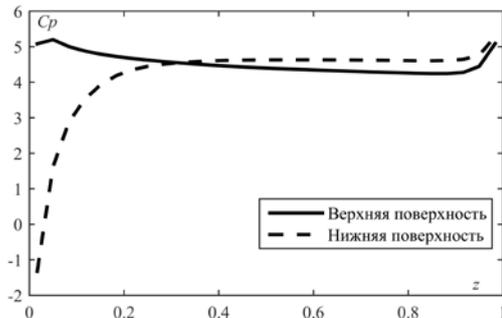


Рис.5. Распределение давлений на границе третьего профиля – закрылок

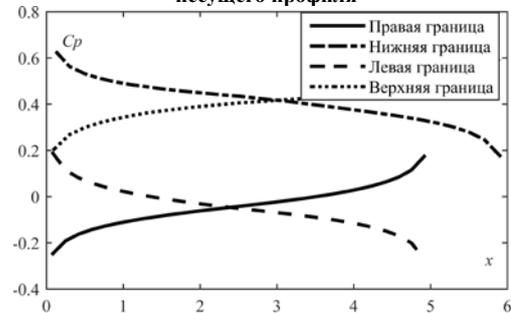


Рис.6. Распределение давлений на границах контрольной области

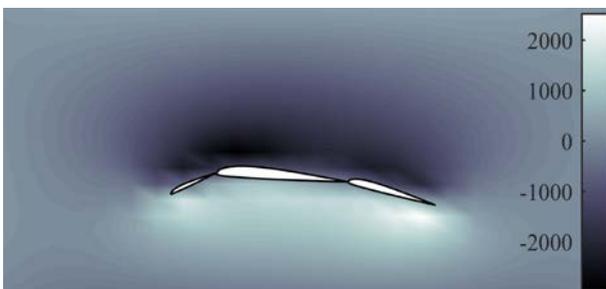


Рис. 7. Распределение завихренности в контрольной области (1/с.)

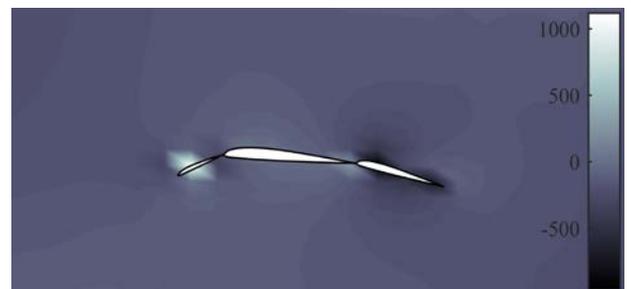


Рис. 8. Распределение относительного давления $p - p_\infty$ в контрольной области (Па).

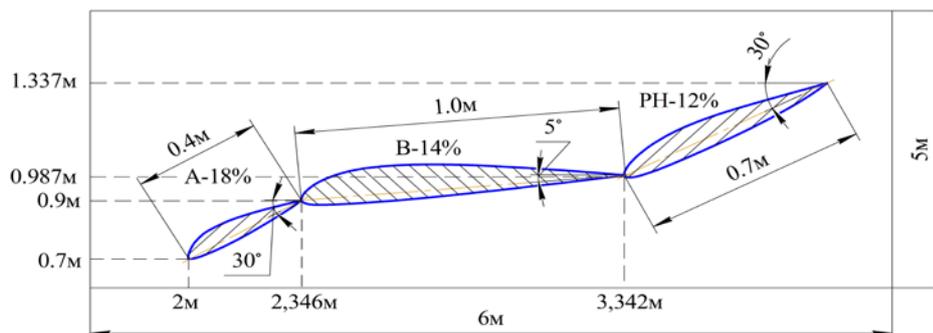


Рис. 9. Расположение системы телесных профилей «А-18%», «В-14%» и «PH-12%». Режим посадки

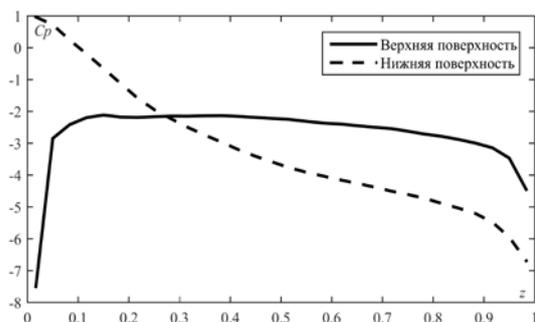


Рис.10. Распределение давлений на границе первого профиля - предкрылок

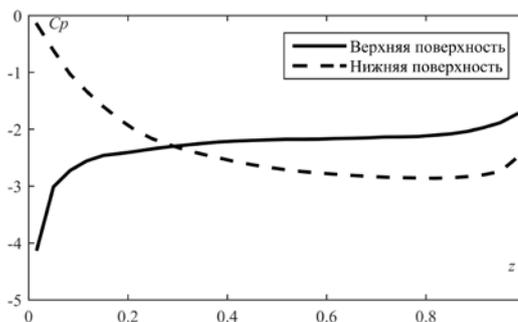


Рис.11. Распределение давления на границе несущего профиля

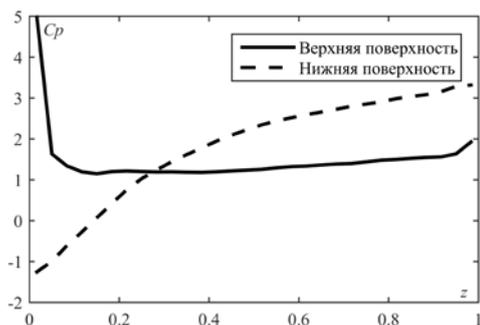


Рис.12. Распределение давления на границе третьего профиля – закрылок

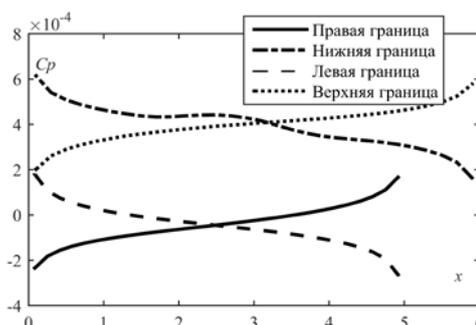


Рис.13. Распределение давления на границах контрольной области.

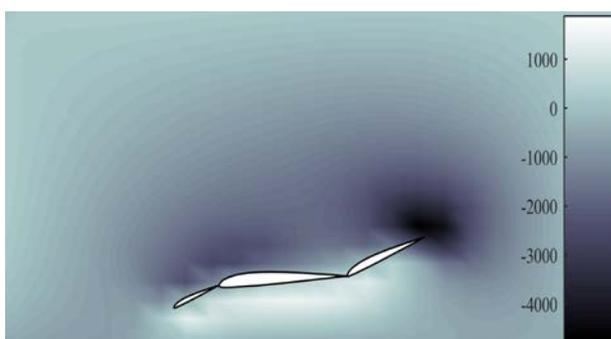


Рис.14. Распределение завихренности в контрольной области (1/c)

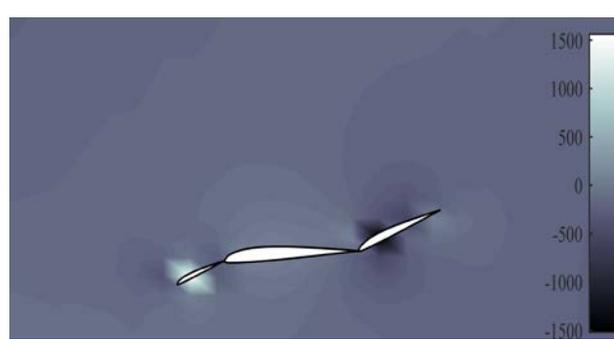


Рис.15. Распределение относительных давлений $p - p_\infty$ в контрольной области (Па)

Выводы

В работе представлены алгоритмические основы и результаты численной реализации метода граничных интегральных уравнений с целью определения распределенных аэродинамических характеристик системы телесных профилей в потоке вязкой несжимаемой жидкости. Для этого создан пакет прикладных программ на базе развитого аппарата векторно-тензорного анализа, алгоритма дискретизации геометрических границ и вычисления интегралов типа потенциалов простого и двойного слоя, а также сингулярных в интегральных представлениях решений.

Полученные результаты в сравнении с данными экспериментами и данными других методов показали хорошее совпадение с допустимыми погрешностями.

Список использованной литературы

1. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. / Бэтчелор Дж. / – М.: Мир, 1973. – 758 с.
2. Белоцерковский О. М. Численное моделирование в механике сплошных сред. /О.М. Белоцерковский/ – М.: Наука, 1984. – 519 с.
3. Мазья, В. Г. Граничные интегральные уравнения. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления / В. Г. Мазья // Итоги науки и техн. ВИНТИ АН СССР. – 1988. – Т. 27. – С. 131–228.
4. Метод граничных интегральных уравнений. Вычислительные аспекты и приложения в механике / Под ред. Т. Круза, Ф. Риццо. – М. : Мир, 1978. – 210 с.
5. Крашаница, Ю. А. Теория обобщённых гидродинамических потенциалов и метод граничных интегральных уравнений в краевых задачах гидродинамики / Ю. А. Крашаница / – К.: Наукова думка, 2013. – 215 с.
6. Huang, K. Tensor analysis / K. Huang – Beijing: Higher Education Publishing, 1998. – 285с.
7. Крашаница, Ю. А. Некоторые обобщения операций векторно-тензорного анализа / Ю. А. Крашаница, Пен Юе // Авиа.-косм. техника и технология. – 2014. – Т. 2/109 . – С. 29–32.
8. Крашаница, Ю. А. Обобщённые операции векторно-тензорного анализа, интегральные представления решений плоских задач обтекания в ограниченном потоке вязкой среды / Ю.А. Крашаница, Пен Юе // Вестник ХНТУ Вып. 3(50) – Херсон: ХНТУ, 2014. – С. 316 – 321.
9. Vasilios N. K. Matlab: a fundamental tool for scientific computing and engineering applications / N. Katsikis Vasilios – Croatia : InTech, 2012. – 1314 p.