

УДК 536.21

В.В. КРЮЧКОВСКИЙ

Херсонский национальный технический университет

А.Н. ХОМЧЕНКО

Черноморский государственный университет, г. Николаев

П.И. ГУЧЕК, Т.П. ЛЯХОВИЧ

Херсонский национальный технический университет

ВЛИЯНИЕ РЕОЛОГИЧЕСКИХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛА НА СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ

В работе указаны границы изменения реологических параметров материала элементов конструкции, при которых первые тона колебаний конструкций переходят в аperiodическое движение.

Ключевые слова: время релаксации, модули упругости, частота собственных колебаний.

В.В. КРЮЧКОВСЬКИЙ

Херсонський національний технічний університет

А.Н. ХОМЧЕНКО

Чорноморський державний університет, м. Миколаїв

П.І. ГУЧЕК, Т.П. ЛЯХОВИЧ

Херсонський національний технічний університет

ВПЛИВ РЕОЛОГІЧНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ МАТЕРІАЛА НА ВЛАСНІ КОЛИВАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ

У роботі вказані межі змін реологічних параметрів матеріалу елементів конструкції, при яких перші тони коливань конструкцій переходять в аperiodичний рух.

Ключові слова: час релаксації, модулі пружності, частота власних коливань.

V. KRUCHKOVSKY

Kherson National Technical University

A. KHOMCHENKO

Chernomorsky State University

P. GUCHEK, T. L' AHOVICH

Kherson National Technical University

THE INFLUENCE OF RHEOLOGICAL PROPERTIES OF THE MATERIAL ON THEIR OWN VIBRATIONS OF STRUCTURAL ELEMENTS

The article identifies the limits of variation of rheological parameters of the material in which the first vibration pitch of structural elements go into aperiodic motion.

Keywords: relaxation time, modulus of elasticity, natural vibration frequency.

Постановка проблемы

Сложность условий, в которых работают современные конструкции, требует при их проектировании учета целого комплекса физико-механических свойств, среди которых важное место занимают вязкоупругие свойства, описывающие ползучесть материала во времени или релаксацию напряжений в них.

В настоящее время не существует достаточно простого закона связи между напряжениями и деформациями, который содержал бы время и отражал реальную действительность столь же точно, как, например, закон Гука в случае идеально упругой среды. Процесс деформирования любого материала, рассматриваемый во времени, оказывается исключительно сложным, поскольку один и тот же материал в различных температурных условиях, при различных скоростях или характере нагружения обнаруживает различные свойства.

Анализ последних исследований и публикаций

Для исследования неразрушающими методами прочностных и деформативных свойств элементов конструкций промышленного оборудования и выяснения физической природы рассеяния энергии колебаний необходимо знание зависимостей затухания собственных колебаний от физико-механических свойств их материалов. Необходимость расширения теоретических и экспериментальных исследований в области колебаний диктуется также внедрением новых материалов при конструировании машин и аппаратов.

Будем исходить из линейной теории наследственности [1,2,3], включающую в себя и теорию упруговязких моделей. Связь между напряжениями, деформациями и временем задаётся линейными интегральными соотношениями

$$E\varepsilon_{ij} = S(\sigma_{ij}) + \int_0^t S(\sigma_{ij})S(t-\tau)d\tau, \quad (1)$$

$$\sigma_{ij} = R(\varepsilon_{ij}) + \int_0^t R(\varepsilon_{ij})R(t-\tau)d\tau. \quad (2)$$

Здесь

$$S(\sigma_{ij}) = (1+\nu)\sigma_{ij} - \nu\sigma_{ii}\delta_{ij};$$

$$R(\varepsilon_{ij}) = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{ij} + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\varepsilon_{ii}\delta_{ij};$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{при } i \neq j; \\ 1, & \text{при } i = j; \end{cases}$$

ν – коэффициент Пуассона; E – модуль упругости при нагружении материала конструкции с мгновенной скоростью; $S(t-\tau)$ – ядро ползучести, учитывающее влияние импульса напряжения, приложенного к элементу конструкции в момент времени τ , на деформации, наблюдаемые в момент времени t ; $R(t-\tau)$ – ядро релаксации, представляющее собой резольвенту интегрального уравнения (1) и может рассматриваться как функция влияния деформаций, имевших место в момент времени τ , на напряжения в момент времени t .

Уравнение (1) отображает процесс ползучести под действием заданного напряжения, а уравнение (2) – процесс релаксации при заданной деформации.

От выбора ядер $S(t-\tau)$ и $R(t-\tau)$ и определения их параметров зависит точность решений рассматриваемых задач. Выбор ядер в виде

$$S(t-\tau) = \frac{n_\sigma - n_\varepsilon}{n_\sigma \cdot n_\varepsilon} e^{-\frac{t-\tau}{n_\sigma}}, \quad R(t-\tau) = \frac{n_\sigma - n_\varepsilon}{n_\sigma \cdot n_\varepsilon} e^{-\frac{t-\tau}{n_\varepsilon}}, \quad (3)$$

позволяет удовлетворительно описать основные экспериментально установленные закономерности рассеяния энергии в материале при циклическом нагружении [4]. Время релаксации n_ε и время ретардации

n_σ связаны соотношением $\frac{n_\varepsilon}{n_\sigma} = \frac{H}{E}$, где H – длительный или конструкционно-силовой модуль упругости, равный отношению напряжения к деформации после длительного действия постоянного напряжения.

Выбор ядер в виде (3) рекомендуется для описания работы конструкций из материалов с явно выраженными неупругими свойствами (полимеры, бетоны, металлы при повышенных температурах и другие).

Как известно [5], во всех внутренних точках сплошной среды удовлетворяются уравнения

$$\sigma_{ij,j} + \rho F_i = \rho \ddot{U}_i, \quad (4)$$

где ρ – плотность материала конструкции.

Подставляя в (4) выражения напряжений через деформации согласно (2), и объединяя массовые силы с инерционными, имеем:

$$R_E(\varepsilon_{ij}) - \int_0^t R_E(\varepsilon_{ij,j})R(t-\tau)d\tau = \rho \ddot{U}_i.$$

Принимая во внимание симметричный тензор деформации

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(U_{i,j} + U_{j,i}),$$

уравнения движения для вязкоупругого тела в перемещениях запишутся:

$$R_E(U_{i,jj}) - \int_0^t R_E(U_{i,jj})R(t-\tau)d\tau = \rho \ddot{U}_i,$$

где

$$R_E(U_{i,jj}) = \frac{E}{2(1+\nu)} U_{i,jj} + \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} U_{j,ji}.$$

Формулирование цели исследования

Рассмотрим характер зависимости собственной частоты ω_{mn} и коэффициента затухания α_{mn} поперечных колебаний пластин и балок, продольных и крутильных колебаний стержней от реологических свойств их материалов. Движения указанных элементов конструкций описываются известными уравнениями [6,7] при соответствующих рассматриваемой конструкции начальных и граничных условиях.

Изложение основного материала исследования

Применяя к уравнениям движения конечные интегральные преобразования и преобразование Лапласа, легко показать, что характер собственных колебаний всех указанных элементов конструкций зависит от вида корней уравнения

$$p^3 + \frac{1}{n_\varepsilon} p^2 + \omega_{mn}^2 p + \omega_{mn}^2 \frac{1}{n_\sigma} = 0. \tag{5}$$

Здесь ω_{mn} ($m, n = 1, 2, 3, \dots$) – частота собственных колебаний рассматриваемого элемента конструкции в упругой области.

Таким образом, исследование характера зависимости корней уравнения (5) от реологических параметров n_σ и n_ε , модулей упругости E и H , представляет обобщающий интерес.

Однако в литературе этот вопрос освещён [8] только для нескольких частных значений коэффициентов уравнения (5).

Явный вид корней уравнения (5) определяется знаком его дискриминанта D_{mn} , который для анализа представим в таких двух эквивалентных формах.

$$D_{mn} \cdot n_\varepsilon^6 = \frac{\mu^4}{4} \left(\frac{H}{E} - k_1 \right) \left(\frac{H}{E} - k_2 \right); \quad D_{mn} \cdot n_\varepsilon^6 = \frac{\mu}{27} (\mu - k_3)(\mu - k_4);$$

где

$$\mu = \omega_{mn}^2 \cdot n_\varepsilon^2; \quad k_{1,2} = \frac{1}{9} \left(1 - \frac{2(1-3\mu)}{3\mu} (1 \pm \sqrt{1-3\mu}) \right);$$

$$k_{3,4} = \frac{27}{8} \left(\frac{H}{E} \left(1 - \frac{H}{E} \right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{H}{E} \right) \left(\frac{1}{3} \mp \sqrt{\left(\frac{1}{9} - \frac{H}{E} \right) \left(1 - \frac{H}{E} \right)} \right) \right).$$

Функция $D_{mn} \left(\frac{H}{E}, \mu \right)$ определяет собой трансцендентную поверхность с точкой локального минимума $M \left(\frac{H}{E} = \frac{1}{9}; \mu = \frac{1}{3} \right)$. Касательная плоскость в точке M пересекает эту поверхность по кривой $k_{1,2}$ (рис.1).

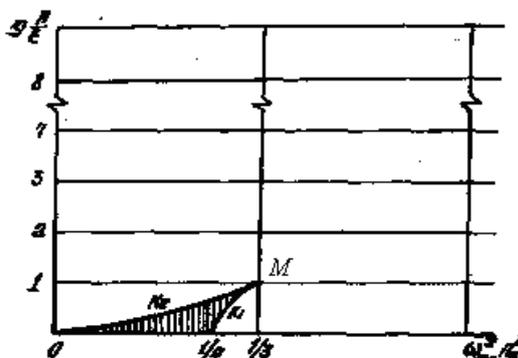


Рис.1. Разбиение экстремальной точкой M допустимых значений реологических параметров на два качественно отличных по своим свойствам интервала

Отношение $\frac{H}{E}$ и время релаксации n_ε ограничены неравенствами [4]: $0 \leq \frac{H}{E} \leq 1$; $0 < n_\varepsilon < \infty$.

Эти допустимые значения разбиваются экстремальной точкой M на два качественно отличных по своим свойствам интервала:

$$0 \leq \frac{H}{E} \leq \frac{1}{9}; \quad \frac{1}{9} < \frac{H}{E} \leq 1; \quad (6 \text{ а, б})$$

$$0 < n_\varepsilon \leq \frac{1}{\sqrt{3} \cdot \omega_{11}}; \quad \frac{1}{\sqrt{3} \cdot \omega_{11}} < n_\varepsilon < \infty. \quad (7 \text{ а, б})$$

Если свойства материала таковы, что имеет место неравенство (6а) или (7а), то собственные колебания элементов конструкций будут состоять из конечного числа затухающих колебаний ($D_{mn} > 0$, светлая область рисунка) (рис.1), конечного числа аperiodических движений ($D_{mn} \leq 0$, тёмная область на рисунке) и бесконечной суммы затухающих со временем последующих тонов колебаний. Аperiodическое движение соответствует только элементам конструкций со свойствами (рис.1)

$$0 < \frac{H}{E} < k_2, \quad k_1 \leq \frac{H}{E} \leq k_2 \quad (8 \text{ а, б})$$

и тем первым тонам собственной частоты, которые соответственно ограничены неравенствами

$$0 < \omega_{mn} < \frac{1}{2n_\varepsilon}; \quad \frac{1}{2n_\varepsilon} \leq \omega_{mn} \leq \frac{1}{\sqrt{3}n_\varepsilon}. \quad (9 \text{ а, б})$$

Неравенства (8а), (9а) и соответственно (8б), (9б) являются необходимыми и достаточными условиями, при выполнении которых первые тона колебаний элементов конструкций из вязкоупругого материала переходят в аperiodическое движение. Так для элементов конструкций из материала Максвелла

($\frac{H}{E} = 0$; $k_3 = 0$; $k_4 = \frac{1}{4}$) аperiodическое движение имеет место для тех первых низших тонов, для которых имеет место неравенство (9а), высшие же тона совершают колебание с частотой

$\omega_{mn}^* = \sqrt{\omega_{mn}^2 - \frac{1}{4n_\varepsilon^2}}$ и коэффициентом затухания $\alpha_{mn} = 0,5 \cdot n_\varepsilon$ одинаковым для всех этих тонов. Для

другого предельного случая, когда $\frac{H}{E} = \frac{1}{9}$ ($k_3 = k_4 = \frac{1}{3}$) аperiodическое движение наблюдается только

для того тона собственной частоты ω_{mn}^* , для которого имеет место равенство $\omega_{mn}^2 n_\varepsilon^2 = \frac{1}{3}$ (рис.1).

Выполнение условия (6б) или условия (7б) свидетельствует о том, что все тона собственной частоты рассматриваемого элемента конструкции будут совершать затухающие колебания (рис. 1). Расчёты

для пластины из материала 33-18-с показали, что $\frac{H}{E} = \frac{3}{5}$; $n_\varepsilon = 0,6 \text{ с}$, $\frac{1}{\sqrt{3} \cdot \omega_{11}} \approx 0,0002 \text{ с}$. Как видим, в

данном случае и условие (6б) и условие (7б) выполняются.

По выполнении любого из этих условий заключаем, что все тона собственной частоты пластины будут иметь затухающий колебательный характер.

Из проведенного анализа можно сделать вывод, что для описания напряженно-деформированного состояния элементов конструкций из материалов, для которых имеет место неравенство (6а) или (7а) может быть использовано уравнение Максвелла, а для материалов со свойствами (6б) или (7б) – уравнение

реологической модели стандартного линейного тела. При $\frac{H}{E} = 1$ ($k_3 = k_4 = -1$) имеем: $\omega_{mn}^* = \omega_{mn}$,

$\alpha_{mn} = 0$. В этом случае материал конструкции ведёт себя как идеально упругая среда Гука.

Из ниже приведенной таблицы 1, в которой указаны отношения параметров H и E для некоторых конструкционных материалов [9-11], видно, что реологические свойства большинства материалов соответствуют неравенству (6б).

Однако, при повышении температуры степень релаксации отдельных материалов резко повышается.

Поэтому такие материалы, как, например, полистирол - при 60°C (допустимая температура применения 65°C) можно рассматривать как тело Максвелла.

Значения параметра $\frac{H}{E}$ для некоторых конструкционных материалов

Материал при 20° С	$\frac{H}{E}$	Материал при 20° С	$\frac{H}{E}$
Полистирол при 60° С	0,03	Полистирол	0,41
Полиэтилен высокой плотности	0,15	Полиамид 66	0,46
Полипропилен	0,21	Полистирол стеклонаполненный	0,49
Полиамид 6	0,27	Прессматериал 33-18с	0,60
Полиэтилен низкой плотности	0,31	Поликарбонат	0,61
Текстолит	0,33	Медь красная при 165° С	0,84
Гетинакс	0,38	Алюминий чистый при 165° С	0,95

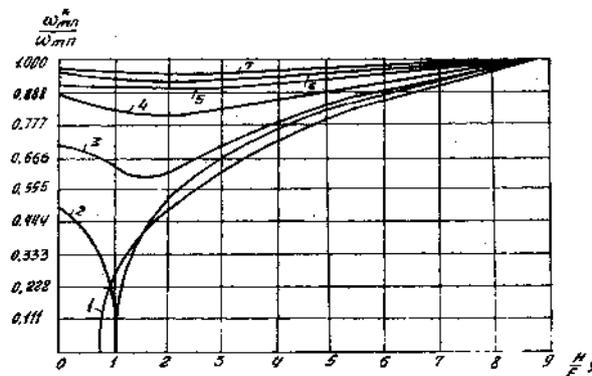


Рис.2. Зависимость тонов собственной частоты колебаний от реологического параметра $\frac{H}{E}$

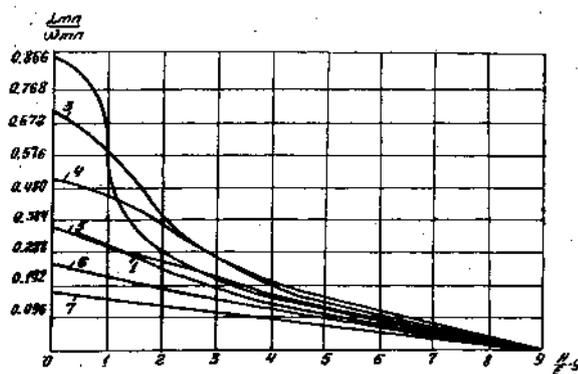


Рис.3. Зависимость коэффициента затухания колебаний от реологического параметра $\frac{H}{E}$

Далее отметим, что если время релаксации n_ϵ обратно пропорционально численному значению одной из частот ω_{mn} , то частота ω_{mn}^* и коэффициент затухания α_{mn} колебаний элемента конструкции из вязкоупругого материала будут пропорциональны соответствующему тону собственной частоты в упругой области.

Так, например, при $n_\epsilon = \frac{1}{\sqrt{3} \cdot \omega_{mn}}$ на интервале (6а) численное значение соответствующего тона собственной частоты уменьшается от $\omega_{mn}^* = 0,5 \cdot \omega_{mn}$ до нуля (рис.2, кривая 2) с одновременным

уменьшением коэффициента затухания от $\alpha_{mn} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \omega_{mn}$ до $\alpha_{mn} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \omega_{mn}$ (рис.3, кривая 2). На интервале (6б) величина этого же тона увеличивается до $\omega_{mn}^* = \omega_{mn}$, а коэффициент затухания колебаний уменьшается до нуля. Для некоторых других значений n_ε аналогичные кривые показаны на тех же рисунках.

Анализ зависимости частоты ω_{mn}^* и коэффициента затухания α_{mn} от изменения величин $\frac{H}{E}$ и n_ε показывает, что точке перегиба графика функции α_{mn} (рис.3) соответствует точка минимума графика функции ω_{mn}^* (рис.2). Абсциссы этих точек определяются равенством $\frac{H}{E} = \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{2}{9 \cdot \mu}\right)$ и смещаются вправо до $\frac{H}{E} = \frac{1}{3}$ при $n_\varepsilon \rightarrow \infty$.

При одной и той же величине отношения $\frac{H}{E}$ численное значение частоты ω_{mn}^* колебаний будет больше для того элемента конструкции, время релаксации материала которой будет больше. При этом большему значению частоты ω_{mn}^* соответствует меньшая величина коэффициента затухания α_{mn} колебаний.

Следует заметить, что для вязкоупругих материалов с временем релаксации $n_\varepsilon > \frac{\sqrt{2}}{\omega_{mn}}$, величина соответствующего тона частоты ω_{mn}^* затухающих колебаний элемента конструкции близка к частоте в случае идеально упругого тела. Так для материалов с одним и тем же значением отношения параметров H и E , например, при $\frac{H}{E} = \frac{1}{3}$, получаем:

$$\omega_{mn}^* = 0,91 \cdot \omega_{mn} \text{ при } \mu = 2 \text{ (рис.2, кривая 5);}$$

$$\omega_{mn}^* = 0,96 \cdot \omega_{mn} \text{ при } \mu = 4 \text{ (рис.2, кривая 6);}$$

$$\omega_{mn}^* = 0,98 \cdot \omega_{mn} \text{ при } \mu = 8 \text{ (рис.2, кривая 7), и т. д.}$$

Кривые 1, 3, 4 на рис.2 и 3 соответствуют значениям $\mu = 0,25; 0,5; 1$.

При $n_\varepsilon > \frac{\sqrt{2}}{\omega_{mn}}$ зависимость коэффициента α_{mn} от изменения отношения $\frac{H}{E}$ на всём промежутке [0;1] можно принять линейной.

Характерно, что зависимость того или иного тона частоты ω_{mn}^* и соответствующего коэффициента затухания α_{mn} колебаний от изменения параметра $\frac{H}{E}$ на сегменте $\left[\frac{1}{3}; 1\right]$ при любом времени n_ε релаксации рассматриваемого вязкоупругого материала можно аппроксимировать также линейным законом.

Выводы

1. Показано, что знание реологических параметров материала позволяет определить величину и характер затухания любого тона собственной частоты колебаний конструкции.
2. Проведенный анализ позволяет также указать области изменения реологических параметров, в которых материал рассматриваемого элемента конструкции близок по своим свойствам к модели тела Максвелла или Гука, или же может быть отнесён к стандартному линейному телу.

Список использованной литературы

1. Огибалов П.М. Оболочки и пластины / П.М. Огибалов, М.А. Колтунов. – М.: Изд-во МГУ, 1969. – 624 с.
2. Ржаницын А.Р. Теория ползучести / А.Р. Ржаницын. – М.: Стройиздат, 1968. – 364 с.

3. Гудрамович В.С. Теория ползучести и её приложения к расчету элементов тонкостенных конструкций / В.С. Гудрамович. – К.: Наукова думка, 2005. – 222 с.
4. Кузьменко В.А. Звуковое и ультразвуковое колебания при динамических испытаниях материалов / В.А. Кузьменко. – Киев: Издание АН УССР, 1963. – 206с.
5. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций / Ю.Н. Работнов. – М.: Наука, 1966. – 512 с.
6. Ильюшин А.А. Основы математической теории термовязкоупругости / А.А. Ильюшин, Б.Е. Победря. – М.: Наука, 1970. – 232 с.
7. Зозуля В.В. Механика сплошной среды / В.В. Зозуля, В.В. Мартиненко, А.Н. Лукин. – М.: Вузовская книга, 203. – 600 с.
8. Постников В.С. Внутреннее трение в металлах / В.С. Постников. – М.: Metallurgia, 1969. – 126 с.
9. Боли Б. Теория температурных напряжений / Б. Боли, Дж. Уэйнер. – М.: Мир, 1964. – 484 с.
10. Немец Я. Прочность пластмасс / Я. Немец, С.В. Серенсен. – М.: Машиностроение, 1970. – 214 с.
11. Хуго И. Конструкционные пластмассы / И. Хуго, И. Карелка и др. – М.: Машиностроение, 1969. – 302 с.