УДК 004.942

В.Ф. МИРГОРОД
АО"Элемент"

ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ ИНТЕГРАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ ВОЛЬТЕРРЫ С СЕПАРАБЕЛЬНЫМ ЯДРОМ

Предлагается и обосновывается новый подход к исследованию свойств моделей динамических объектов, представленных математическими моделями в виде интегральных уравнений Вольтерры II-го рода. Подход основан на рассмотрении сопряженного интегрального уравнения и установлении резольвентных решений. Установлена связь с Гамильтоновой формой эквивалентных дифференциальных уравнений, взаимосвязи резольвентных решений относительно ИУ и фундаментальных решений относительно эквивалентных дифференциальных уравнений.
Ключевые слова: математическая модель, интегральное уравнение, эквивалентное преобразование, резольвента.

В.Ф. МИРГОРОД
ВАТ"Елемент"

ДОСЛІДЖЕННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ ІНТЕГРАЛЬНИХ МОДЕЛЕЙ ВОЛЬТЕРРИ З СЕПАРАБЕЛЬНИМ ЯДРОМ

Пропонується і обґрунтовується новий підхід до дослідження властивостей моделей динамічних об'єктів, представлених математичними моделями у вигляді інтегральних рівнянь Вольтерри II-го роду. Підхід заснований на розгляді зв'язаного інтегрального рівняння і встановленні резольвентних рішень. Встановлений зв'язок з Гамільтоновою формою еквівалентних диференціальних рівнянь, взаємозв'язки резольвентних рішень щодо інтегральних рівнянь і фундаментальних рішень щодо еквівалентних диференціальних рівнянь.
Ключові слова: математична модель, інтегральне рівняння, еквівалентне перетворення, резольвента.

V.F.MIRGOROD
Public Limited Company "Element"

RESEARCH OF THE PROPERTIES OF VOLTERRA INTEGRAL MODELS WITH SEPARABLE KERNELS

There is offered and grounded the new approach to research of the models properties of dynamic objects, presented by mathematical models as Volterra integral equations of the second kind. Approach is based on consideration of the adjointed integral equation and determining the resolvent solutions. Connection with the Hamiltonian form of equivalent differential equations, intercommunications of resolvent solutions in relation to integral equations and fundamental solutions in relation to equivalent differential equations is determined.
Keywords: mathematical model, integral equation, equivalent transformation, resolvent.

Введение

Проблема исследования управляемого изменения состояния сложных динамических объектов в настоящее время решается путем построения их математических моделей (ММ), как правило, в виде моделей пространства состояний, отвечающих в наибольшей степени методам и средствам современной теории управления. Однако далеко не все процессы в реальных объектах управления могут быть описаны указанными математическими моделями пространства состояния, что требует отыскания новых форм их математического описания. Важная научно-прикладная задача состоит в отыскании таких форм ММ, которые при сохранении адекватности реальным процессам позволили бы упростить их численную реализацию.

Известные преимущества интегральных моделей, в частности интегральных уравнений Вольтерры II-го рода, предопределяют необходимость и практическую значимость рассмотрения методов отыскания различных форм их аналитических решений на основе решения соответствующих уравнений, связывающих ядро и резольвенту.

Постановка проблемы и цель исследования

Теоретические основы решения интегральных уравнений (ИУ) рассмотрены в ряде фундаментальных работ [1–3]. Методы и алгоритмы их численного решения предложены в справочной литературе [3,4]. Особенности интегро-дифференциальных уравнений и программные средства их решения изложены в [5,6]. Для отдельных частных случаев интегральных уравнений в [1–3] предлагаются также некоторые аналитические решения. В [7,8] предложены такие решения для ряда важных прикладных задач. В то же время необходимость численной реализации ММ непосредственно в составе систем управления требует систематического рассмотрения вопросов отыскания решений интегральных уравнений, применяемых в качестве математических моделей исследуемых объектов. В первую очередь это касается интегральных уравнений Вольтерры II-го рода, имеющих широкую область применения в прикладных задачах и для которых разработаны эффективные методы численного решения [3].

Целью настоящего исследования является разработка методов аналитического решения интегральных уравнений Вольтерры II-го рода с сепарабельным ядром на основе отыскания решений соответствующих уравнений, связывающих ядро и резольвенту.

Основные результаты

В ИУ Вольтерры с сепарабельным ядром

$$y(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) \int_{x_H}^{x} \beta_i(s) y(s) ds \tag{1}$$

функции $\{\alpha_i(x)\}$ и $\{\beta_i(s)\}$ являются системами линейно независимых функций [1,3], поэтому предположим, что воздействие $f(x)$ может быть представлено разложением по такой системе линейно независимых функций

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) a_i,\ a_i = const. \tag{2}$$

В дальнейшем используется векторная запись

$$\begin{aligned} y(x) &= f(x) + \vec{\alpha}^T(x) \int_{x_H}^{x} \vec{\beta}(s) y(s) ds, \\ f(x) &= \vec{\alpha}^T(x) \vec{a}. \end{aligned} \tag{3}$$

Эквивалентная (3) система дифференциальных уравнений устанавливается соотношениями

$$\vec{\omega}(x) = \int_{x_H}^{x} \vec{\beta}(s) y(s) ds, \tag{4}$$

$$\frac{d\vec{\omega}(x)}{dx} = \vec{\beta}(x) y(x), \tag{5}$$

из (4) получим

$$y(x) = f(x) + \vec{\alpha}^T(x)\vec{\omega}(x) = \vec{\alpha}^T(x)\left[\vec{a} + \vec{\omega}(x)\right] = \vec{\alpha}^T \vec{v}(x), \text{ где } \vec{v}(x) = \vec{\omega}(x) + \vec{a}.$$

Согласно (5)

$$\frac{d\vec{\omega}(x)}{dx} = \vec{\beta}(x)\left[\vec{\alpha}^T(x)\vec{\omega}(x) + \vec{\alpha}^T(x)\vec{a}\right] = \vec{\beta}(x)\vec{\alpha}^T(x)\left[\vec{\omega}(x) + \vec{a}\right].$$

Из приведенных выражений следует, что ИУ (1) при условии (2) эквивалентно матричному дифференциальному уравнению в виде

$$\frac{d\vec{v}(x)}{dx} = A^T(x)\vec{v}(x), \tag{6}$$

где $A^T(x) = \vec{\beta}(x)\vec{\alpha}^T(x)$, с начальными условиями $\vec{v}(x) = \vec{a}$, и дополнительно справедливы соотношения

$$y(x) = \vec{\alpha}^T(x)\vec{v}(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) v_i(x),$$

$$\frac{dv_i(x)}{dx} = \beta_i(x) y(x),\ i = \overline{1,n}.$$

Введем в рассмотрение сопряженные функции $\{\varphi_i(x)\}$ и сопряженное интегральное уравнение

$$z(x) = F(x) + \sum_{i=1}^{n} \beta_i(x) \int_{x}^{x_H} \alpha_i(s) z(s) ds, \tag{7}$$

где, в свою очередь, $F(x)$ разлагаются по системе линейно независимых функций $\{\beta_i(x)\}$:

$$F(x)=\sum_{i=1}^{n}\beta_i(x)\cdot b_i.$$

Сформируем соответствующие Гамильтоновы функции

$$\begin{aligned} H_1(\varphi,v)&=\vec{\varphi}^T(x)\frac{d\vec{v}(x)}{dx},\\ H_2(\varphi,v)&=\vec{v}^T(x)\frac{d\vec{\varphi}(x)}{dx}. \end{aligned} \tag{8}$$

Согласно свойствам Гамильтоновых функций получим следующие сопряженные уравнения

$$\begin{aligned} \frac{dH_1}{d\vec{\varphi}}&=\frac{d\vec{v}(x)}{dx}=A^T(x)\vec{v}(x),\\ \frac{dH_2}{d\vec{v}}&=\frac{d\vec{\varphi}(x)}{dx}=-A(x)\vec{\varphi}(x). \end{aligned} \tag{9}$$

Нетрудно установить, что выполняется соотношение

$$H_1+H_2=0, \tag{10}$$

так как $H_1=\vec{\psi}^T A^T\vec{v}$, а $H_2=\vec{v}^T A^T\vec{\varphi}$.

Поскольку

$$H_1+H_2=\sum_{i=1}^{n}\left(\varphi_i\frac{dv_i}{dx}+v_i\frac{d\varphi_i}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(\sum_{i=1}^{n}\varphi_i v_i\right)=0,$$

то скалярная функция в виде интеграла от суммы гамильтонианов является постоянной при переменных координатах исходной и сопряженной системы дифференциальных уравнений по той причине, что ее производная по независимой переменной согласно (9) тождественно равняется нулю.

Для установления взаимосвязи между исходными и сопряженными уравнениями рассмотрим преобразование

$$\vec{\varphi}(x)=P(x)\vec{v}(x), \tag{11}$$

где $P(x)$ есть еще неопределенная матрица.

Подстановка (11) в систему уравнений для гамильтонианов приводит к следующему матричному дифференциальному уравнению

$$\frac{dP(x)}{dx}+P(x)A(x)+A^T(x)P(x)=0, \tag{12}$$

которое по форме является близким к известному уравнению Ляпунова.

Рассмотрим взаимосвязь полученных результатов с резольвентным решением ИУ (1) и (7). Переходные матрицы фундаментальных решений матричных дифференциальных уравнений, которые составляют Гамильтонову систему (9) , удовлетворяют, в свою очередь, дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi_1(x_H,x)}{dx}&=-A^T(x)\Phi_1(x_H,x),\\ \frac{d\Phi_2(x_H,x)}{dx}&=A(x)\Phi_2(x_H,x). \end{aligned} \tag{13}$$

Поскольку справедливо

$$\begin{aligned} \vec{v}(x)&=\Phi_1(x_H,x)\vec{v}_H,\\ \vec{y}(x)&=\vec{\alpha}^T(x)\Phi_1(x_H,x)\vec{v}_H, \end{aligned}$$

то решение ИУ (1) через резольвенту имеет вид

$$y(x)=\vec{\alpha}^T(x)\left[E+\int_{x_H}^{x}\vec{\alpha}^T(s)R(x,s)ds\right]\vec{v}_H.$$

Из последнего выражения получаем следующую взаимосвязь между фундаментальной матрицей и резольвентой

$$\vec{\alpha}^T(x)\Phi_1(x,s)\vec{\beta}(s)=R_1(x,s). \tag{14}$$

Рассматривая аналогичным образом сопряженные уравнения и учитывая известное соотношение $\Phi_1^T(x,s)\Phi_2(x,s)=E$, получим взаимосвязь для сопряженных уравнений

$$\vec{\beta}^T(x)\Phi_2(x,s)\vec{\alpha}(s)=R_2(x,s). \quad (15)$$

Поскольку

$$R_1(x,s)R_2^T(x,s)=\vec{\alpha}^T(x)\Phi_1(x,s)A^T(x,s)\Phi_2(x,s)\vec{\beta}(s), \quad (16)$$

то для вектор-функции резольвенты следует соотношение

$$R_2(x,s)=R_1^T(x,s).$$

Полученные результаты относительно свойств ИУ Вольтерры II-го рода, их представление в сопряженной форме, связи с Гамильтоновой формой дифференциальных уравнений, взаимосвязи резольвентных решений относительно ИУ и фундаментальных решений относительно эквивалентных дифференциальных уравнений, возможности решения эквивалентного дифференциального матричного уравнения относительно матрицы $P(x)$ представляют основу для решения ряда важных прикладных задач, в частности, оптимизации и моделирования режимов сложных технических объектов.

Заключение

Предлагаемый подход к установлению решений некоторых типов интегральных уравнений Вольтерра II-го рода на основе отыскания решений соответствующих уравнений, связывающих ядро и резольвенту, дает возможность исследовать новые классы решений таких уравнений и упростить алгоритмы численной реализации при таблично заданных исходных данных, что определяет существенные преимущества предлагаемых моделей.

Выводы и перспективы дальнейших исследований

Перспективы дальнейших исследований связаны с расширением круга возможных типов интегральных уравнений Вольтерры II-го рода, для которых могут быть получены аналитические решения.

Список использованной литературы

1. Смирнов В.И. Курс высшей математики / В.И. Смирнов. – М.: Наука, 1974. – Т. 4. – Ч. 1. – 336 с.
2. Забрейко П.П. Интегральные уравнения / П.П. Забрейко, А.И. Кошелев, М.А. Красносельский. – М.: Наука, 1968. – 448 с.
3. Верлань А.Ф. Справочник по интегральным уравнениям / А.Ф. Верлань, В.С. Сизиков. – К.: Техника, 1986. – 700 с.
4. Методы вычислений на ЭВМ / В.В. Иванов. – К.: Наук. Мысль, 1986. – 584 с.
5. Верлань А.Ф. Моделирование систем автоматического управления с реальными обратными связями на основе интегро-дифференциальных уравнений Вольтера / А.Ф. Верлань, В.Ф. Миргород, Д.Э. Контрерас // Тр. Одесск. Гос. Политехн. Ин-та. – 2000. – Вып. 3(12). – С. 120–123.
6. Миргород В.Ф. Квадратурно-разностные алгоритмы моделирования нелинейных динамических объектов / В.Ф. Миргород, Д.Э. Контрерас, А.Б. Волощенко // Моделирование и информационные технологии. – 2000. – Вып. 6. – С. 152–156.
7. Миргород В.Ф. Обобщение методов аналитического решения некоторых типов интегральных уравнений Вольтерра второго рода / В.Ф. Миргород // Искусственный интеллект. – 2009. – № 3. – С. 68–80.
8. Миргород В.Ф. Эквивалентные преобразования интегральных и дифференциальных математических моделей / В.Ф. Миргород, И.М. Гвоздева // Матер. междунар. научн. конф. “Интеллектуальные системы принятия решений и проблемы вычислительного интеллекта”. – 18-22 мая 2009. – 2009. – Евпатория – Т. 1. – С. 88–91.