УДК 519.7

Ю.Л. МЕНЬШИКОВ
Дніпропетровський національний університет ім. О. Гончара

АЛГОРИТМ СИНТЕЗУ АДЕКВАТНИХ МАТЕМАТИЧНИХ ОПИСІВ

Розглянуті питання побудови адекватних математичних описів фізичних процесів. Показано, що таких описів існує нескінченна множина. Знайдені умови, за яких отримуються адекватні описи. Визначено два основних підходи до проблеми побудови адекватних математичних описів. Запропоновано алгоритм ідентифікації параметрів локального адекватного лінійного математичного опису у межах першого підходу на прикладі динамічної системи, рух якої описується лінійний системою звичайних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами. Наведено приклади синтезу конкретних адекватних математичних описів.

Ключові слова: адекватні математичні описи, визначення, алгоритм ідентифікації параметрів.

Ю.Л. МЕНЬШИКОВ
Днепропетровский национальный университет им. О. Гончара

АЛГОРИТМ СИНТЕЗА АДЕКВАТНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОПИСАНИЙ

Рассмотрены вопросы построения адекватных математических описаний физических процессов. Показано, что таких описаний существует бесконечное множество. Найдены условия, при которых получены адекватные описания. Определены два основных подхода к проблеме построения адекватного математического описания. Предложен алгоритм идентификации параметров локального адекватного линейного математического описания в рамках первого подхода на примере динамической системы, движение которой описывается линейной системой обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Даны примеры синтеза конкретных адекватных математических описаний.

Ключевые слова: адекватные математические описания, определение, алгоритм идентификации параметров.

Yu.L. MENSHIKOV
Dnepropetrovsk National University

ALGORITHM OF SYNTESIS OF ADEQUATE MATHEMATICAL DESCRIPTIONS

The questions of construction of adequate mathematical description of physical processes are considered. It is shown that such descriptions there are an infinite set. The conditions under which received adequate descriptions are investigated. Here are identified two main approaches to the problem of constructing an adequate mathematical description. The algorithm for parameter identification of adequate local linear mathematical description in the frame of one approach, an example of a dynamic system, whose motion is described by a linear system of ordinary differential equations with constant coefficients is given. Examples of the synthesis of adequate mathematical descriptions are executed.

Keywords: the adequate mathematical description, definition, identification algorithm of parameters.

Постановка проблемы

Одной из основных целей математического моделирования является достоверное прогнозирование поведения динамических систем или физических процессов. Необходимым условием достоверного прогнозирования является построение адекватного математического описания изучаемого процесса. Под математическим описанием физического процесса в данной работе понимается аналитическая связь (дифференциальная, алгебраическая, интегральная и т.д.) определенной структуры между выбранными переменными состояния исследуемой системы (математическая модель процесса) и внешними воздействия (нагрузками) [1, 2]. Естественно, структура математической модели, количество переменных состояния, значения коэффициентов могут быть различными и определяется целями изучения конкретного физического процесса [3, 4]. Дадим теперь возможное определение адекватного математического описания.

Определение. Математическое описание физического процесса будем называть *адекватным математическим описанием* (*АМО*) исследуемого процесса, если результаты математического моделирования (simulation) с использованием этого описания совпадают с экспериментальными данными с точностью измерений в некоторой окрестности исходных данных.

Если математическое описание процесса не является адекватным, т.е. результаты математического моделирования не совпадают с экспериментом, тогда дальнейшее использование этого описания является проблематичным.

Предлагаемое сравнение результатов математического моделирования с экспериментальными данными в определения *АМО* обеспечивает объективность результатов математического моделирования.

Задача синтеза адекватного математического описания в настоящее время остается еще малоизученной и плохо формализуется [1,5]. При решении же практических задач исследователи, как правило, проверку адекватности математического описания не проводят [3,4].

Следует отметить что, при проверке выполнения условия адекватности, которое присутствует в определении, возникает ряд принципиальных трудностей. Например, каким образом выполнить проверку адекватности выбранного математического описания при прогнозировании? В новых условиях проведения эксперимента, для которых выполняется прогнозирование, могут измениться параметры физического процесса и внешнего воздействия на него. И при этом отсутствуют гарантии, что в новых условиях будет выполняться условие адекватности ранее построенного математического описания, так как оно базировалось на прошлом эксперименте. Таким образом, выполнение основного требования адекватности невозможно проверить при отсутствии эксперимента в новых условиях.

Проблема состоит также и в оценке степени совпадения результатов математического моделирования с экспериментом. Во многих случаях необходимо сравнивать взаимное отклонение двух вектор-функций в некотором функциональном пространстве с выбранной метрикой. Однако, способов задания метрик существует множество. К этому еще следует добавить неопределенность в выборе диапазона изменения переменных, на котором сравниваются две вектор-функции.

Очевидно, что один и тот же физический процесс может иметь бесконечное множество адекватных математических описаний.

Дополнительные трудности вносят реальные ограничения при проведения эксперимента. Например, как правило, из исследуемых характеристик процесса (переменных состояния) реально удается измерить две – три величины. И если учесть, что характеристик физического процесса бесконечно много, то мы всегда находимся в условиях, когда измеряемых характеристик значительно меньше, чем теоретически возможных. Каким образом можно оценить адекватность математического описания процесса, используя только часть переменные состояния?

Эти неопределенности усложняют формализацию задачи.

Предположим, что *АМО* физического процесса построено с использованием некоторого алгоритма. Однако результаты моделирования, полученные с помощью такого *АМО*, не представляют практического интереса, так как есть уже более достоверные экспериментальные измерения.

Математическое моделирование, используя *АМО*, для изучения физического процесса в новых условиях малопригодно, так как математическое описание локально и в общем случае непригодно для новых условий.

Однако, если параметры *АМО* являются устойчивыми к малым изменениям исходных данных, тогда близость результатов математического моделирования с использованием такого *АМО* с будущими экспериментами при малых изменениях исходных данных (эксперимента и параметров математической модели процесса) будет гарантирована.

Во многих случаях математическая модель строится как линейные дифференциальные соотношения между характеристиками физического процесса. Такого типа модели получили значительное распространение в технике, экологии, экономике и т.д. Для обоснованного применения линейных математических моделей необходимо принимать во внимание, что они получены при определенных условиях. Рассмотрим эти условия более детально.

Изложение основного материала исследования

Пусть физический процесс характеризуется в общем случае некоторым количеством переменных (переменных состояния) $x_1, x_2, ..., x_k$, зависящих от бесконечного числа исходных параметров процесса $z_1, z_2, ..., z_n, ...$. Выбор характеристик физического процесса $x_1, x_2, ..., x_k$ определяются конечными целями исследований.

Будем полагать, что переменные $x_1, x_2, ..., x_k$ удовлетворяют некоторой системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = F(x, z), \tag{1}$$

с уравнением наблюдения

$$y = C\,x, \tag{2}$$

где $x(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_k(t))^T$ есть вектор-функция переменных состояния ($(.)^T$ – знак транспонирования), $z(t) = (z_1(t), z_2(t), .., z_l(t), .)^T$ – вектор-функция внешних воздействий, $y(t) = (y_1(t), y_2(t), .., y_k(t))^T$ – вектор-функция, наблюдаемых в эксперименте переменных, C – квадратная неособенная матрица размером $k \times k$ [2,5]. Под внешними воздействиями (нагрузками) будем понимать функции $z_1(t), z_2(t), .., z_l(t), ...$, которые изменяются независимо от субъективных факторов или свойств и поведения исходной математической модели (1). На практике существенное влияние на физический процесс оказывает лишь конечное количество внешних воздействий, а остальными влияниями можно пренебречь. Тогда вектор функция внешних воздействий будет иметь вид: $z(t) = (z_1(t), z_2(t), .., z_n(t))^T$.

Зафиксируем решение $x^0(t, x_1^0, x_2^0, ..x_k^0)$ системы (1), удовлетворяющее дополнительным начальным условиям: $x_1(t_0) = x_1^0, x_2(t_0) = x_2^0, ..x_k(t_0) = x_k^0$. В некоторой малой окрестности этого решения отклонения $\tilde{x}(t, \tilde{x}_1^0, \tilde{x}_2^0, ..\tilde{x}_k^0)$ от фиксированного решения $x^0(t, x_1^0, x_2^0, ..x_k^0)$ будут удовлетворять линейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений :

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + B\tilde{z}\,, \tag{3}$$

с уравнением наблюдения

$$\tilde{y} = C\,\tilde{x}\,, \tag{4}$$

где $\tilde{x}(t) = (\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t), ..., \tilde{x}_k(t))^T$ есть вектор-функция переменных состояния, $\tilde{z}(t) = (\tilde{z}_1(t), \tilde{z}_2(t), .., \tilde{z}_n(t))^T$ – вектор-функция внешних воздействий, $\tilde{y}(t) = y - Cx^0$ есть известная вектор-функция, A, B – матрицы с постоянными коэффициентами соответствующей размерности.

Из процесса построения линейной математической модели (2) можно сделать вывод, что не существует в принципе линейной математической модели типа (3), которая бы точно описывала связь характеристик реального физического процесса $x(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_k(t))^T$ с параметрами $z(t) = (z_1(t), z_2(t), .., z_n(t))^T$.

Пусть $z^1 = (z_1^1, z_2^1, ..., z_n^1)^T$, есть некоторая вектор-функция внешних воздействий. Если при подстановке этих функций в (3) получаем вектор-функцию характеристик $x^1(t) = (x_1^1(t), x_2^1(t), ..., x_k^1(t))^T$, который отличается от измерения $\tilde{x}(t) = (\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t), ..., \tilde{x}_k(t))^T$ на величину δ и эта величина не превосходит ошибки δ_0 измерения характеристик $\tilde{x}(t) = (\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t), ..., \tilde{x}_k(t))^T$, тогда математическое описание (уравнение (3) и вектор-функцию $x^1(t) = (x_1^1(t), x_2^1(t), ..., x_k^1(t))^T$) будем называть *адекватным локальным линейным математическим описанием* (*АЛЛМО*) физического процесса.

Исходя из условий построения адекватного линейного математического описания физического процесса, можно сформулировать следующие ограничения на исследуемые физические процессы с помощью такого описания:

1. Изменения переменных состояния физического процесса $x(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_k(t))^T$ происходят вблизи некоторой малой окрестности известного решения $x^0(t, x_1^0, x_2^0, ..x_k^0)$ нелинейной системы (1);
2. Влияние параметров $z_{n+1}, z_{n+2}, ...$ на характеристики $x(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_k(t))^T$ является незначительным или эти характеристики не изменяются в процессе исследования физического процесса.

Из вышеизложенного вытекают свойства локальной линейной приближенной математической модели физического процесса в дифференциальной форме:

1. Математические модели типа (3) при любом выборе параметров $z_1, z_2, ..., z_n$ являются приближенными;
2. Математические модели типа (3) хорошо описывают реальный физический процесс лишь в некоторой достаточно малой окрестности известного решения $x^0(t, x_1^0, x_2^0, ..x_k^0)$.

Дополнительно следует потребовать, чтобы параметры адекватного математического описания были устойчивыми к малым изменениям исходных данных.

В настоящее время существует два основных подхода к проблеме построения адекватного математического описания [2,6-8]:

– по математической модели с выбранной априори структурой и неточными параметрами определяется модель внешнего воздействия, которая в совокупности с математической моделью процесса обеспечивает условие адекватности (совпадение с экспериментом) [9];

– по некоторой заданной априори модели внешнего воздействия подбирается математическая модель процесса, которая в совокупности с моделью внешнего воздействия обеспечивают совпадение с экспериментом [7-9].

Наличие сравнения результатов математического моделирования с экспериментальными данными в определении адекватного математического описания обеспечивает объективность результатов синтеза. В литературе такой подход называется методом идентификации: оценка параметров адекватного математического описания по результатам измерений характеристик состояния физического процесса [7-9].

В работах [2, 10, 11] предложен алгоритм идентификации параметров адекватного локального линейного математического описания (*АЛЛМО*) в рамках первого подхода на примере динамической системы, движение которой описывается линейной системой обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами типа (3).

При этом также нет оснований полагать, что полученное таким образом математическое описание будет близко к реальному математическому описанию. Это лишь устойчивая пара (математическая модель и модель внешнего воздействия), которая обеспечивает адекватность результатов математического моделирования [2, 10, 11].

Следует отметить, что в данных задачах нет смысла рассматривать поведение адекватного математического описания при стремлении погрешности исходных данных к нулю. В силу этого, не имеет смысла оценивать погрешность полученного математического описания. Эта погрешность может иметь произвольную величину и ее величина не имеет никакого значения для целей дальнейшего математического моделирования. Для целей дальнейшего использования адекватного математического описания более важно, чтобы параметры математического описания были устойчивы к малым изменениям исходных данных.

Примеры расчетов конкретных адекватных математических описаний представлены в работах [2,10,11].

Устойчивое адекватное математическое описание может быть использовано и для прогнозирования. С этой целью для нескольких малых окрестностей области изменения параметров физического процесса синтезируются свои *АЛЛМО*, далее параметры *АЛЛМО* экстраполируются (интерполируются) на новые окрестности области изменения параметров физического процесса и проводится математическое моделирование в новых условиях без использования экспериментальных данных в этих условиях.

Выводы

В работе предложен один из возможных алгоритмов идентификации параметров адекватного локального линейного математического описания на примере динамической системы, движение которой описывается линейной системой обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Список использованной литературы

1. Shanon R., Systems Simulation - the art and science. –Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, –New Jersey, –1975, –329p.
2. Меньшиков Ю., Об адекватности результатов математического моделирования // Труды. Междунар. конференции "Моделирование-2008", –К., –Украина, –2008, –С.119-124.
3. Soeiro N., others, Vibratory Working Modelling through Methods of Continuum Mechanics // Proc. Eleventh International Congress on Sound and Vibration, –St. Petersburg, –Russia, –2004, –P.2821-2828.
4. Sarmar I., Malik A., Modeling, analysis and simulation of a Pan Tilt Platform based on linear and nonlinear systems // Proc. IEEE/ASME MESA, –China, –2008, –P.147-152.
5. Menshikov Yu.L., Synthesis of Adequate Mathematical Description as Solution of Special Inverse Problems // European Journal of Mathematical Sciences, –v. 2, –n. 3, –2013, –P.256-271.
6. Степашко В.С., Метод критической дисперсии как аналитический аппарат теории индуктивного моделирования // Проблемы управления и информатики, –Киев, –Украина, –2, –2008, –С.27-32.
7. Губарев В.Ф., Метод итеративной идентификации многомерных систем с неточными данными, ч.1. Теоретические основы // Проблемы управления и информатики, –Киев, –Украина, –2, –2008, –С.8-26.
8. Жуков О.А., Алгоритмы итеративной идентификации многомерных систем // Тр. 15 международной конференции по автоматическому управлению "Автоматика-2008", –Одесса: INIA, –Украина, –2008, –С.774-777.
9. Гельфандбейн Ю.М., Колосов Л.С., Ретроспективная идентификация возмущений и помех, –М., –Наука, –1972, – 246с.
10. Меньшиков Ю.Л., Поляков Н.В., Идентификация моделей внешних воздействий. – Вид-во «Наука та Освіта», Днепропетровск, Украина, –2009, –188с.
11. Menshikov Yu.L., Identification of external loads as method of adequate mathematical description synthesis // Proc. of 32nd IASTED International Conference on Modelling, Identification and Control (*MIC 2013*), February 11 – 13, 2013, –Innsbruck, –Austria, –2013, –8p.