УДК 519.6

Ю.І. ПЕРШИНА, О.В. ШИЛІН
Українська інженерно-педагогічна академія

ВІДНОВЛЕННЯ ВНУТРІШНЬОЇ СТРУКТУРИ 3D ТІЛА ЗА ВІДОМИМИ ЇЇ ТОМОГРАМАМИ НА СИСТЕМІ ДОВІЛЬНИХ ПЛОЩИН З ВИКОРИСТАННЯМ ІНТЕРФЛЕТАЦІЇ ФУНКЦІЙ

Досліджено метод відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла за допомогою поліноміальної інтерфлетації з використанням відомих томограм (слідів), що лежать на системі довільних площин, який є узагальненням методу відновлення тіла за відомими томограмами на системі трьох груп паралельних площин. Наведені теореми про інтерфлетаційні властивості та похибку побудованого оператора.

Ключові слова: інтерфлетація функцій трьох змінних, томограма, комп'ютерна томографія.

Ю.І. ПЕРШИНА, О.В. ШИЛИН
Украинская инженерно-педагогическая академія

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ВНУТРЕННЕЙ СТРУКТУРЫ 3D ТЕЛА ПО ИЗВЕСТНЫМ ЕЕ ТОМОГРАММАМ НА СИСТЕМЕ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИНТЕРФЛЕТАЦИИ ФУНКЦИЙ

Исследован метод восстановления внутренней структуры трехмерного тела с помощью полиномиальной интерфлетации с использованием известных томограмм (следов), лежащих на системе произвольных плоскостей, который является обобщением метода восстановления тела по известным томограммами на системе трех групп параллельных плоскостей. Приведены теоремы об интерфлетационных свойствах и погрешности построенного оператора.

Ключевые слова: интерфлетация функций трех переменных, томограмма, компьютерная томография.

Y.I. PERSHYNA, O.V. SHILIN
Ukrainian Engineering and Pedagogical Academy

RESTORATION OF INTERNAL STRUCTURE 3D BODY BY KNOWN HER TOMOGRAMS ON A SYSTEM OF ARBITRARY PLANES USING THE INTERFLATATION FUNCTIONS

We studied a method of restoring the three-dimensional internal structure of the body with the help of polynomial interflatation using conventional tomograms (trace) lying on a system of arbitrary planes, which is a generalization of the method of recovery of the body of a famous tomograms on a system of three groups of parallel planes. This theorem about interfletaionaly properties and construction of the operator error.

Keywords: interflatation functions of three variables, tomogramma, computed tomography

Постановка проблеми

В останній чверті 20-го століття в практиці медичних досліджень, а також при неруйнівному контролі тривимірних об'єктів, при проведенні наукових досліджень у різних областях науки і техніки тощо, знайшли широке застосування комп'ютерні томографи [1–3], які дозволяють відновлювати внутрішню структуру тіла не розрізаючи його. При цьому виник новий клас задач − задач відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла за відомими його томограмами на декількох площинах.

В роботах [4–5] були побудовані та досліджені оператори поліноміальної та сплайн-інтерфлетації [6] функції трьох змінних за відомими слідами на системі трьох груп площин (в кожній групі площини паралельні) і на основі цих операторів була розв’язана задача тривимірної комп’ютерної томографії, у випадку, коли відомі томограми в системі трьох груп перерізів (паралельна схема сканування). Була доведена висока точність розроблених методів. Відомими є методи розв’язання 3D задачі комп’ютерної томографії за допомогою конусоподібної та спіральної схеми сканування, в яких задані площини не є паралельними [7-9].

Робота присвячена розв'язанню задачі відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла за відомими томограмами, що лежать на системі довільно розташованих площин. Розроблений в статті метод є узагальненням методів, розроблених авторами в роботах [4-5] та є більш точним, ніж відомі методи авторів [7-9].

Основна частина

Побудова оператора інтерфлетації на системі довільно розміщених площин

Побудуємо оператор, який дозволить відновити просторово змінний коефіцієнт поглинання $f(x),\ x=(x_1,x_2,x_3),\ x\in R^3$ всередині тривимірного тіла за відомими його зображеннями (томограмами) $T_k(\bar{x})$) на системі будь-яких N перерізаних площин, які задаються наступними рівняннями

$$\Pi_k:\omega_k(x)=:\sum_{p=1}^{3}a_{kp}x_p-\gamma_k=0\,,\ k=\overline{1,N}\ \ \sqrt{\sum_{p=1}^{3}a_{kp}^2}=1,$$

Вважаємо, що в одній точці перетинається на більше трьох площини.

Введемо наступні позначення:

1). $\tau_{ik}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3}\\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3}\end{vmatrix}$ – вектор, направлений вздовж лінії перетину площин $\omega_i=0,\ \omega_k=0;$;

2). $M=\{(i,k,l)\,|\,\Pi_i\cap\Pi_k\cap\Pi_l=V_{ikl}=(x_{ikl1},x_{ikl2},x_{ikl3})\neq\varnothing,\ i\neq k\neq l\}$, де V_{ikl} – точка перетину трьох площин; $M-$ множина точок перетину;

3). $\Gamma_{ik}=\Pi_i\cap\Pi_k\neq\varnothing,$ – ребра, по яких перетинаються дві площини на яких лежать відповідні томограми;

4). $\Delta_{ikl}=\begin{vmatrix}a_{i1} & a_{i2} & a_{i3}\\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3}\\ a_{l1} & a_{l2} & a_{l3}\end{vmatrix}$ – визначник, складений із коефіцієнтів рівняння заданих площин;

5). $\mathrm{T}_k(\bar{x})$ – томограма, яка лежить на площині Π_k .

Означення 1[4]. Томограмою $T_k(\bar{x})$ (слідом функції $f(x)$) на площині $\omega_k(x)=0$ за умови, що коефіцієнти $a_{ki}\,,i=\overline{1,3}$ не дорівнюють нулю, будемо називати одну з трьох функцій:

$$T_k(\bar{x})=\begin{cases}f(x_{1k}(x_2,x_3),x_2,x_3)\\ f(x_1,x_{2k}(x_1,x_3),x_3)\\ f(x_1,x_2,x_{3k}(x_1,x_2))\end{cases}=\begin{cases}f((\gamma_k-a_{k2}x_2-a_{k3}x_3)/a_{k1},x_2,x_3),\ a_{k1}\neq0\\ f(x_1,(\gamma_k-a_{k1}x_1-a_{k3}x_3)/a_{k2},x_3),\ a_{k2}\neq0\\ f(x_1,x_2,(\gamma_k-a_{k1}x_1-a_{k2}x_2)/a_{k3}),\ a_{k3}\neq0\end{cases},\quad \bar{x}=\begin{cases}(x_1,x_2),\ \ x_3=0\\ (x_1,x_3),\ \ x_2=0\\ (x_2,x_3),\ \ x_1=0\end{cases},$$

де $x_k=x_{kp},\ k=\overline{1,3}$ $-$вирази, що отримують розв'язанням рівняння $\omega_k(x)=0$ відносно змінної x_p. Якщо $\omega_k(x)=0$ залежить від однієї або двох змінних, то томограмою $T_k(\bar{x})$ на Π_k будемо називати, відповідно, дві або одну функції. Наприклад, якщо $\Pi_k:\ \omega_k=a_{k1}x_1+a_{k2}x_2-\gamma_k=0$, то томограмою $T_k(\bar{x})$ на цій площині буде функція $f(a_{k1}^{-1}(\gamma_k-a_{k2}x_2),x_2,x_3)$ або функція $f(x_1,a_{k2}^{-1}(\gamma_k-a_{k1}x_1),x_3)$. Якщо Π_k: $\omega_k(x)=a_{k,1}x_1-\gamma_k=0,\quad a_{k1}\neq0$, то томограмою $T_k(\bar{x})$ на цій площині буде одна функція $f(a_{k1}^{-1}\gamma_k,x_2,x_3)$.

Таким чином, поняття томограми включає в себе площину і функцію, задану в точках цієї площини. Але за виглядом $T_k(\bar{x})$ не можна відновити просторово змінний коефіцієнт поглинання всередині тривимірного тіла (внутрішню структуру).

Нехай томограми $\mathrm{T}_i(\bar{x}),\mathrm{T}_k(\bar{x}),\mathrm{T}_l(\bar{x})$ перетинаються в точці V_{ikl}. Позначимо

$$u_{li}^k(x)=V_{ikl}+\frac{\tau_{ik}}{\Delta_{ikl}}\omega_l(x)+\frac{\tau_{kl}}{\Delta_{kli}}\omega_i(x),\quad w_i(x)=V_{ikl}+\frac{\tau_{kl}}{\Delta_{kli}}\omega_i(x).$$

Теорема 1. Оператор $L_{ikl}(x) \in C(R^3)$ вигляду

$$L_{ikl}(x) = [L_{ik}^l + L_{kl}^i + L_{li}^k - L_{li}^k L_{kl}^i - L_{kl}^i L_{li}^k - L_{li}^k L_{ik}^l + L_{ik}^l L_{kl}^i L_{li}^k](x),$$

де

$$L_{ik}^l(x) = T_l(u_{ik}^l(x)), \quad L_{ik}^l L_{kl}^i(x) = T_l(w_k(x)), \quad L_{ik}^l L_{kl}^i L_{li}^k(x) = T_k(\bar{x})\Big|_{\omega_i(x)=0,\ \omega_l(x)=0}.$$

є оператором інтерфлетації функції трьох змінних, побудований на трьох площинах, тобто задовольняє умовам $T_k(\bar{x}) \in C^r(R^2),\ r \geq 0$ та умовам С.М. Нікольського, які на ребрі Γ_{kl} зводяться до перевірки рівностей

$$T_k(u_{li}^k(x))\Big|_{\omega_l(x)=0} = T_l(u_{il}^l(x))\Big|_{\omega_k(x)=0},$$

тобто значення томограм, на лінії перетину повинні співпадати для всіх томограм, що перетинаються. Аналогічний вигляд мають ці умови на ребрах Γ_{ik}, Γ_{li}.

В точці V_{ikl} умови Нікольського зводяться до перевірки рівностей

$$T_l(u_{ik}^l(x))\Big|_{\omega_i(x)=0,\omega_k(x)=0} = T_k(u_{li}^k(x))\Big|_{\omega_l(x)=0,\omega_i(x)=0} = T_i(u_{kl}^i(x))\Big|_{\omega_k(x)=0,\omega_l(x)=0},$$

тобто значення томограм в точці перетину повинні співпадати для всіх томограм, що перетинаються. Розповсюдження результатів на випадок більшої кількості площин, ніж три, проводиться в теоремі 4 завдяки використанню розкладу одиниці.

Приклад 1. Нехай в просторі задано три площини, які мають рівняння

$$\omega_1(x,y,z) = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + z = 0,$$

$$\omega_2(x,y,z) = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{4}z = 0,$$

$$\omega_3(x,y,z) = z = 0.$$

Томограми, які лежать на цих площинах, відповідно можуть мати наступний вигляд:

$$T_1(x,z) = f(x,y,z)\Big|_{\omega_1=0} = f(x,-2z-\sqrt{3}x,z), \quad T_2(y,z) = f(x,y,z)\Big|_{\omega_2=0} = f(\frac{\sqrt{3}}{2}z - \sqrt{3}y, y, z),$$

$$T_3(x,y) = f(x,y,z)\Big|_{\omega_3=0} = f(x,y,0).$$

Умови С.М. Нікольського на ребрі, утвореному площинами $\omega_1 = 0$ та $\omega_3 = 0$, будуть мати вигляд:

$$f(x,y,z)\Big|_{\substack{\omega_1=0\\ \omega_3=0}} = T_{30} = T_{10}.\ f(x,y,z)\Big|_{\substack{\omega_1=0\\ \omega_3=0}} = f(-\frac{y}{\sqrt{3}},y,0),\ T_{30} = f(x,y,0)\Big|_{x=-\frac{y}{\sqrt{3}}} = f(-\frac{y}{\sqrt{3}},y,0),$$

$$T_{10} = f(\frac{-2z-y}{\sqrt{3}},y,z)\Bigg|_{z=0} = f(-\frac{y}{\sqrt{3}},y,0).$$

Аналогічно можна записати умови С.М. Нікольського на інших двох ребрах.

Теорема 2. Нехай внутрішня структура тривимірного тіла описується функцією $f(x) \in C^r(\Omega)\ (r \geq 3)$, яка має томограми $\mathrm{T}_k(\bar{x}),\ k = \overline{1,N}$, задані на площинах Π_k відповідно, та задовольняє умови $f(x)\big|_{\Pi_s} = T_s(\bar{x})\big|$. Тоді для похибки $R_{ikl}f(x) = (I - L_{ikl})f(x)$ наближеного відновлення внутрішньої структури $f(x)$ оператором $L_{ikl}(x)$, побудованим за допомогою даного набору площин та томограм, виконується рівність

$$R_{ikl}f(x) = \int_0^{\omega 1_i}\int_0^{\omega 2_k}\int_0^{\omega 3_l} \frac{\partial^3}{\partial t_i\,\partial t_k\,\partial t_l} f\left(V_{ikl} + \frac{\tau_{kl}}{\Delta_{kli}}t_i + \frac{\tau_{li}}{\Delta_{lik}}t_k + \frac{\tau_{ik}}{\Delta_{ikl}}t_l\right) dt_i\,dt_k\,dt_l. \quad (1)$$

Теорема 3. Нехай множина довільних томограм, які знаходяться на площинах, що задаються рівняннями:

$$\Pi_k : \omega_k(x) = 0, k = \overline{1,N},$$

задовольняє умову: в одній точці $V_{ikl} = \Pi 1_i \cap \Pi 2_k \cap \Pi 3_l$ перетинаються не більше трьох томограм. Тоді система функцій

$$h_{ikl}(x)=\frac{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i,k,l}}^{N}\omega_j(x)}{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i,k,l}}^{N}\omega_j(V_{ikl})}$$

має властивості $h_{ikl}(V_{i'k'l'})=\delta_{i,i'}\delta_{k,k'}\delta_{l,l'},\ i,i'=\overline{1,n},\ k,k'=\overline{1,m},\ l,l'=\overline{1.s}.$ та є розкладом одиниці, тобто $\sum\limits_{\substack{i,k,l\in M\\ i\neq k\neq l}}^{m}h_{ikl}(x)=1$.

Теорема 4. Нехай томограми $T_k(\overline{x})\in C^r(R^2)$, $r\geq 3$ задовольняють умовам С.М. Нікольського на ребрах і в точці перетину площин. Тоді функція

$$L(x)=\sum_{(i,k,l)\in M}h_{ikl}(x)L_{ikl}(x)$$

є поліноміальним інтерфлетантом із властивостями

$$L(x)\in C^r(\Omega),\ \ L(x)\big|_{\Pi_s}=T_s(\overline{x}),\ s=\overline{1,N}$$

При цьому $\forall f(x)\in C^r(\Omega),\ r\geq 3$, що задовольняє умовам теореми 3, виконується рівність

$$L(x)=Lf(x),\ \ f(x)=Lf(x)+R\,f(x),\ \ R(x)f(x)=\sum_{(i,k,l)\in M}h_{ikl}(x)R_{ikl}f(x)$$

де $R_{ikl}f(x)$ визначається формулою (1), а $h_{ikl}(x)$ – допоміжні поліноми, що визначаються в теоремі 3.

Теорема 5. Абсолютна неусувна похибка E побудованого інтерфлетанта в припущені, що $f(x,y,z)$ задані на площинах Π_k, тобто відповідні томограми задані наближено δ_k, тобто

$$\left|T_k(\overline{x})-\tilde{T}_k(\overline{x})\right|\leq\delta_k\ \ k=\overline{1,n}\,,$$

а також $\left|T_k(\overline{x})\big|_{\Pi_i}-\tilde{T}_k(\overline{x})\big|_{\Pi_i}\right|\leq\delta_{ki}$, $k=\overline{1,n},\ l=\overline{1,m}$, $\left|T_k(\overline{x})\big|_{\omega_i(x)=0,\,\omega_l(x)=0}-\tilde{T}_k(\overline{x})\big|_{\omega_i(x)=0,\,\omega_l(x)=0}\right|\leq\delta_{kil}$,.

дорівнює

$$E\leq\sum_{(i,k,l)\in M}\delta_i+\delta_k+\delta_l+\delta_i\delta_k+\delta_i\delta_l+\delta_k\delta_l+\delta_i\delta_k\delta_l\ .$$

Тестовий приклад відновлення функції трьох змінних за допомогою оператора інтерфлетації за відомими її слідами на системі довільно розташованих площин.

За викладеною методикою був розроблений комплекс програм в системі комп'ютерної математики *MathCad*. Результати її тестування демонструють високу точність.

Продемонструємо результати роботи програми.

Нехай задані 4 площини $\Pi_k:\omega_k(x)=0$ у вигляді

$$\omega_1=\frac{x+y+z-1}{\sqrt{3}},\ \ \omega_2=\frac{-x+y+z-1}{\sqrt{3}},\ \ \omega_3=\frac{x-y+z-1}{\sqrt{3}},\ \ \omega_4=\frac{-x-y+z-4}{\sqrt{3}},$$

які перетинаються в чотирьох точках:

$$V_{123}=(0,0,1),\ V_{124}=(0,-1.5,2.5),\ V_{134}=(-1.5,0,2.5),\ V_{234}=(-1.5,-1.5,1)\,.$$

Як бачимо, в одній точці не перетинається більше трьох площин.

Про функцію $F(x)=x_1^2+10x_2+5x_3$ відомі її сліди на заданих площинах, тобто томограми

$$\mathrm{T}_1(\overline{x})=F(x)\big|_{\omega_1(x)=0}=x_1^2-5x_1+5x_2+5\,,$$

$$\mathrm{T}_2(\overline{x})=F(x)\big|_{\omega_2(x)=0}=x_1^2-5x_1+15x_2+5\,,$$

$$\mathrm{T}_3(\overline{x})=F(x)\big|_{\omega_3(x)=0}=x_1^2+5x_1+5x_2+5\,,$$

$$\mathrm{T}_4(\overline{x})=F(x)\big|_{\omega_4(x)=0}=x_1^2+5x_1+15x_2+5\,.$$

За теоремою 4 був побудований оператор інтерфлетації, який використовує лише задані томограми та рівняння площин, на яких лежать томограми. Після спрощення побудований оператор набуває вигляду

$$L(x) = x_1^2 + 10x_2 + 5x_3$$

Висновки

З тестового прикладу робимо висновок, що побудований оператор інтерфлетації за відомими томограмами (слідами) на системі довільно розташованих площин точно відновив квадратичну функцію, чого не можливо досягнути за допомогою операторів інтерполяції, які використовуються в сучасних методах комп'ютерної томографії.

Викладений метод відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла за допомогою операторів інтерфлетації у випадку відомих томограм, що лежать на системі бідь-яких площин, є узагальненням розробленого авторами методу відновлення за відомими томограмами на системі трьох груп перерізаних площин і має таку ж високу точність.

Список використаної літератури

1. Наттерер Ф. Математические аспекты компьютерной томографии: Пер. с англ. / Ф. Наттерер. – М.: Мир, 1990. – 279 с.
2. Хермен Г. Восстановление изображений по проекциям: основы реконструктивной томографии: Пер. с англ. / Г. Хермен. – М.: Мир, 1983. – 350 с.
3. Хелгасон С. Преобразование Радона: Пер. с англ. / С. Хелгасон. – М: Мир, 1983. – 152 с.
4. Сергієнко І.В. Математичне моделювання в комп'ютерній томографії з використанням інтерфлетації функцій: Монографія / І.В. Сергієнко, О.М. Литвин, Ю.І. Першина. – Харків, 2008. – 160 с.
5. Литвин О.М.. Математична модель відновлення внутрішньої структури тривимірного об'єкта за відомими його томограмами з використанням інтерфлетації функцій / О.М. Литвин, Ю.І. Першина // Доповіді НАНУ. – 2005. – №1. – С. 20-24.
6. Литвин О.М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування / О.М. Литвин. – Х.: Основа, 2002. – 544с.
7. Likhachev A.V. A new method for deriving unknown additive background in projection in three-dimensional tomography / A.V. Likhachev, V.V. Pikalov // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2002. – Vol. 42, № 3. – P. 341-352.
8. Трофимов О.Е. Об одном способе восстановления изображения по многоракурсной томограмме / О.Е. Трофимов, Л.В. Тюренкова. – Новосибирск, 1989. – 28 с. (Препр./ ИАиЭ СО АН СССР;440).
9. Пикалов В.В. Сравнение алгоритмов спиральной томографии / В.В. Пикалов, А.В. Лихачев // Вычислительные методы и программирование. – 2004. – №5. – С. 170-183.