УДК 539.3

В.Б.РУДНИЦЬКИЙ, Д.М.МАКСИМЧУК
Хмельницький національний університет

КОНТАКТ КІНЕЧНИХ ЦИЛІНДРІВ І ПРУЖНОГО ШАРУ З ПОЧАТКОВИМИ (ЗАЛИШКОВИМИ) НАПРУЖЕННЯМИ

В рамках лінеаризованої теорії пружності, розглянуто задачу про тиск пружних циліндричних штампів на шар з початковими (залишковими) напруженнями. Дослідження виконано в загальному вигляді для теорії великих початкових деформацій та різних варіантів теорії малих початкових деформацій при довільній структурі пружного потенціалу.

Ключові слова: пружний потенціал, пружний штамп, пружний шар з початковими (залишковими) напруженнями, перетворення Ханкеля.

В.Б.РУДНИЦЬКИЙ, Д.Н.МАКСИМЧУК
Хмельницкий национальный университет

КОНТАКТ КОНЕЧНЫХ ЦИЛИНДРОВ И УПРУГОГО ШТАМПА С НАЧАЛЬНЫМИ (ОСТАТОЧНЫМИ) НАПРЯЖЕНИЯМИ

В рамках линеаризованной теории упругости рассмотрена смешанная задача о давлении упругих цилиндрических штампов на слой с начальными (остаточными) напряжениями. Исследования выполнены в общем виде для теорий больших начальных деформаций и различных вариантов теорий малых начальных деформаций при произвольной структуре упругого потенциала.

Ключевые слова: упругий потенциал, упругий цилиндр, упругий слой с начальными (остаточными) напряжениями, преобразования Ханкеля.

V.B.RUDNITSKY, D.M.MAXIMCHYK
Hmelnitsky national university

CYLINDRICAL PUNCHES WHICH INTERACT WITH THE LAYER WITH INITIAL RESIDIAL STRESSES

The paper deals with the mixed type task of measuring pressure of an elastic cylinders dies upon a layer with initial (residual) stresses within the framework of linear elasticity theory. In general, the research was carried out for the theory of great initial deformations and different variants of the theory of small initial deformations with arbitrary structure of elastic potential.

Keywords: elastic potential, elastic cylinder, elastic layer with initial (residual) stresses, the way of Henkel integrals.

Вступ

На сьогоднішній день по проблемі, яка відноситься до контактних задач в рамках класичних постановок, одержані результати по широкому колу питань. Серед проблем, які вимагають більш глибокого дослідження знаходяться контактні задачі для тіл з початковими (залишковими) напруженнями. Дослідження цих проблем має велику теоретичну і практичну цінність в зв’язку з тим, що початкові (залишкові) напруження практично завжди присутні в елементах конструкцій і механізмів. Хоча проблеми контактної взаємодії попередньо напружених тіл з’явилися в класичній теорії пружності порівняно недавно, вони набули широкого спектру розвитку в нашій країні та за кордоном. Це пояснюється тим, що лінійна теорія пружності не враховує вплив початкових напружень, хоча їх можна врахувати у межах лінеаризованої теорії пружності, що одночасно розвивалася двома напрямками: із врахуванням конкретної форми пружного потенціалу та довільною структурою пружного потенціалу для теорії великих початкових деформацій та різних варіантів теорії малих початкових деформацій для стисливих (нестисливих) тіл (академік НАН України О. М. Гузь, С. Ю. Бабич, В. Б. Рудницький) [2-6]. Постановка цих задач потребує залучення нелінійної теорії пружності. При досить великих початкових напруженнях можна обмежитися її лінеаризованим варіантом. Такий підхід дозволяє отримати результати із прийнятою у теорії пружності точністю та доводить доцільність дослідження даних задач. Проте навіть при досить значній величині початкових (залишкових) напружень досліджувані задачі можна розглядати в лінеаризованому варіанті [1-4]. В даний час існує два підходи до розрахунку контактних задач з початковими (залишковими) напруженнями. Один з них характеризується використанням конкретної форми пружного потенціалу, де розглядаються задачі для нестисливих тіл з початковими (залишковими) напруженнями з потенціалом Трелоара. Це дослідження В. М. Александрова і Н.Х. Арутоняна та їх учнів [1, 5]. Другий підхід пов’язаний з дослідженням контактних задач для пружних тіл з початковими (залишковими) напруженнями з довільною структурою пружного потенціалу в загальному вигляді для стисливих і нестисливих матеріалів для теорій кінечних (великих) і декількох варіантів теорій малих початкових деформацій. Ці дослідження проводяться в рамках лінеаризованої теорії пружності тіл з початковими (залишковими) напруженнями.

Перші дослідження були виконані Гузем А. М. В подальшому ідеї другого підходу були розвинені в роботах С. Ю. Бабича і В. Б. Рудницького [4, 5].

Постановка задачі та граничні умови

Розглядається просторова осесиметрична задача про тиск двох співвісних кінечних циліндрів (R_i −радіус циліндрів, l_i - їх висота) на пружний шар також з початковими (залишковими) напруженнями товщиною $2h_i$ ($h_i = \lambda_i h_2$), де h_2 - товщина шару до виникнення там початкових (залишкових) напружень, λ_i - коефіцієнти видовження, що визначають початковий стан. Досліджується питання про вплив початкових (залишкових) напружень на контактні зусилля при стисненні шару двома співвісними пружними циліндрами за допомогою зовнішніх сил, головний вектор яких рівний P. Приведено аналіз знайденого розв'язку і його порівняння з відомими результатами.

Розглянемо пружний шар товщиною $2h_1$. При дослідженні поряд з декартовими координатами $(y_1; y_2; y_3)$ будемо застосовувати кругові циліндричні системи координат $(r;\ \theta;\ y_3)$ або $(r;\ \theta;\ z_j)$. Систему координат $(r;\ \theta;\ z_j)$ розмістимо в центрі пружного шару, а вісь z_i направимо по геометричних пружних штампах. Припустимо, що зовнішні сили, прикладені до вільних торців циліндричних штампів так, що їх точки зміщаються в напрямі осі oy_3 на величину $\varepsilon_+, \varepsilon_-$ відносно площини $y_3 = 0$, а між штампами і шаром тертя відсутнє (позначимо напруження і переміщення у пружних циліндрах індексом (1)). Рахуючи, що пружні штампи виготовлені з різних ізотропних матеріалів, для визначення складових вектора переміщення і тензора напружень в пружних штампах і шарі одержимо граничні умови.

На торцях пружних штампів

$$U_3^{(1)} = -\varepsilon_+;\ \ Q_{3r}^{(1)} = 0;\ \ \forall(r) \in [0, R_1];\quad y_3 = h_1 + l_1; \tag{1}$$

$$U_3^{(2)} = +\varepsilon_-;\ \ Q_{3r}^{(2)} = 0;\ \ \forall(r) \in [0, R_2];\ \ y_3 = -h_1 + l_2. \tag{2}$$

На боковій поверхні пружних штампів

$$Q_{rr}^{(1)} = 0;\ \ Q_{3r}^{(1)} = 0;\ \ \forall(y_3) \in [0, l_1];\ \ r = R_1; \tag{3}$$

$$Q_{rr}^{(2)} = 0;\ Q_{3r}^{(2)} = 0;\ \ \forall(y_3) \in [0, l_2];\ r = R_2. \tag{4}$$

На границі пружного шару в області контакту

$$U_3 = U_3^{(1)};\ \ \tilde{Q}_{33} = Q_{33}^{(1)};\ \ \tilde{Q}_{3r} = \tilde{Q}_{3r}^{(1)} = 0;\ \ \forall(r) \in [0, R_1];\quad y_3 = -l_1; \tag{5}$$

$$U_3 = U_3^{(2)};\ \ \tilde{Q}_{33} = Q_{33}^{(2)};\ \ \tilde{Q}_{3r} = \tilde{Q}_{3r}^{(2)};\ \ \forall(r) \in [0, R_2];\ \ y_3 = -l_2. \tag{6}$$

На границі пружного шару поза областю контакту

$$\tilde{Q}_{33} = \tilde{Q}_{3r} = 0;\ \ \forall(r) \in (r, +\infty)\ ;\ \ y_3 = \pm h_i. \tag{7}$$

Величини переміщень і напружень, позначених індексом (1), належать "верхньому штампу", індексом (2) – "нижньому штампу".

Умови рівноваги приводять до рівності:

$$\int_0^{R_1} \rho \left[\tilde{Q}_{33}\right]_{y_3 = -l_1} d\rho - \int_0^{R_2} \rho \left[\tilde{Q}_{23}\right]_{y_3 = -l_2} d\rho = 0.$$

Рівнодійна зовнішніх сил визначається

$$P = -2\pi \int_0^{R_1} \rho \left[\tilde{Q}_{33}\right]_{y_3 = -l_1} d\rho = -2\pi \int_0^{R_2} \rho \left[\tilde{Q}_{23}\right]_{y_3 = -l_2} d\rho.$$

Граничні умови (1)-(7) і умови рівноваги визначають постановку задачі про контактну взаємодію пружного штампу з пружним шаром.

Напружено-деформівний стан в пружних штампах визначається з рівнянь рівноваги лінеаризованої теорії пружності у випадку для стисливих і нестисливих матеріалів у випадку $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$ рівних і нерівних коренів визначального рівняння. Приводимо вирази для компонент тензора напруження і вектора переміщення у випадку рівних коренів визначального рівняння.

Розв'язки для циліндричних штампів з початковими (залишковими) напруженнями для $n_1 \neq n_2$:

Компоненти вектора переміщення для стисливих тіл :

$$U_r = -6C_0 r\left(\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}\right) - \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\gamma_k^2\left[A_k v_1 I_1(v_1\gamma_k r)S_6(\gamma_k z_1 v_1) + B_k v_2 I_1(v_2\gamma_k r)S_6(\gamma_k z_2 v_2)\right] - \right.$$
$$\left. -\alpha_k^2 J_1(\alpha_k r)\left(\frac{S_4(\alpha_k z_1)}{v_1}+\frac{S_5(\alpha_k z_2)}{v_2}\right)\right\};$$

$$U_3 = 12C_0\left[\frac{m_1 z_1}{n_1}+\frac{m_2 z_2}{n_2}\right] + \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\gamma_k^2\left[A_k m_1 I_0(\gamma_k v_1 r)S_1(\gamma_k z_1 v_1) + B_k m_2 I_0(\gamma_k v_2 r)S_1(\gamma_k z_2 v_2)\right] - \right.$$
$$\left. -\alpha_k^2 J_0(\alpha_k r)\left(\frac{m_1 S_2(\alpha_k z_1)}{n_1}+\frac{m_2 S_3(\alpha_k z_2)}{n_2}\right)\right\}.$$

Компоненти вектора напруження для стисливих тіл :

При $y_3 = const$:

$$Q_{33} = C_{44}\left\langle 12C_0\left[\frac{(1+m_1)l_1}{v_1}+\frac{(1+m_2)l_2}{v_2}\right] + \right.$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\gamma_k^3\left[(1+m_1)l_1 A_k n_1 I_0(\gamma_k v_1 r)S_6(\gamma_k z_1 v_1) + (1+m_2)l_2 n_2 B_k I_0(\gamma_k v_2 r)S_6(\gamma_k z_2 v_2)\right] - \right.$$
$$\left.\left. -\alpha_k^3 J_0(\alpha_k r)\left(\frac{(1+m_1)l_1 S_4(\alpha_k z_1)}{v_1}+\frac{(1+m_2)l_2 S_5(\alpha_k z_2)}{v_2}\right)\right\}\right\rangle;$$

$$Q_{3r} = C_{44}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\gamma_k^3\left[(1+m_1)A_k v_1 I_1(\gamma_k v_1 r)S_1(\gamma_k z_1 v_1) + (1+m_2)B_k v_2 I_1(\gamma_k v_2 r)S_1(\gamma_k z_2 v_2)\right] + \right.$$
$$\left. +\alpha_k^3 J_1(\alpha_k r)\left[\frac{1+m_1}{n_1}S_2(\alpha_k z_1)+\frac{1+m_2}{n_2}S_3(\alpha_k z_2)\right]\right\}.$$

При $r = const$ (для стисливих тіл):

$$Q_{rr} = -D_{44}\left\langle 6C_0\left[\frac{(1+\tilde{c}_0-2\tilde{c}_1)}{v_1}+\frac{(1+\tilde{c}_0-2\tilde{c}_2)}{v_2}\right] + \right.$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\gamma_k^3\left(n_1 A_k S_6(\gamma_k z_1 v_1)\left[(\tilde{c}_0-\tilde{c}_1)I_0(\gamma_k v_1 r)+\frac{1-\tilde{c}_0}{r\gamma_k v_1}I_1(\gamma_k v_1 r)\right] + \right.\right.$$
$$\left. +n_2 B_k S_6(\gamma_k z_2 v_2)\left[(\tilde{c}_0-\tilde{c}_2)I_0(\gamma_k v_2 r)+\frac{1-\tilde{c}_0}{r\gamma_k v_2}I_1(\gamma_k v_2 r)\right]\right) + \alpha_k^2\left(\frac{\tilde{c}_0-1}{r}J_1(\alpha_k r)\left[\frac{S_4(\alpha_k z_1)}{v_1}+\frac{S_5(\alpha_k z_2)}{v_2}\right] + \right.$$
$$\left.\left.\left. +\alpha_k J_0(\alpha_k r)\left[\frac{\tilde{c}_1-\tilde{c}_0}{v_1}S_4(\alpha_k z_1)+\frac{\tilde{c}_2-\tilde{c}_0}{v_2}S_5(\alpha_k z_2)\right]\right)\right\}\right\rangle;$$

$$Q_{r3} = \sum_{i=1}^{\infty}\left(\gamma_k^3\left[d_5 A_k v_1 I_1(\gamma_k v_1 r)S_1(\gamma_k z_1 v_1) + d_6 B_k v_2 I_1(\gamma_k v_2 r)S_1(\gamma_k z_2 v_2)\right] + \alpha_k^3 J_1(\alpha_k r)\left[\frac{d_5}{n_1}S_2(\alpha_k z_1)+\frac{d_6}{n_2}S_3(\alpha_k z_2)\right]\right).$$

Розв'язки для пружного шару з початковими (залишковими) напруженнями вибираємо у вигляді (випадок нерівних коренів):

$$U_r(r,z_j) = -\int_0^\infty \xi^2 \left[A_j ch(\xi,z_j) + B_j sh(\xi,z_j)\right] I_1(\xi,r)d\xi\ ;$$

$$U_3(r,z_j) = \frac{m_1}{\sqrt{n_1}} \int_0^\infty \xi^2 \left[A_1 sh(\xi,z_1) + B_1 ch(\xi,z_1) + S_3(A_2 sh(\xi,z_2) + B_2 ch(\xi,z_2)\right] I_0(\xi,r)d\xi\ ;$$

$$\tilde{Q}_{33}(r,z_i) = c_{44}(1+m_1)\tilde{c}_1 \int_0^\infty \xi^3 \left[A_1 ch(\xi,z_1) + B_1 sh(\xi,z_1) + S(A_2 ch(\xi,z_2) + B_2 sh(\xi,z_2)\right] d\xi\ .$$

Приведені тут загальні розв'язки для просторових статичних лінеаризованих рівнянь записані в загальному вигляді у випадку теорії великих (кінечних) початкових(залишкових) деформацій і різних теорій малих деформацій для потенціалів довільної структури і мають широку область застосування.

Задовольнивши граничні умови (1)-(7) знаходимо співвідношення між коефіцієнтами A_k, B_k, E_k, F_k. Вводячи позначення [3] можна записати вирази для компонент тензора деформацій і вектора переміщень через нові невідомі $\chi_n^{(i)}$. Постійні $A(\xi)$, $B(\xi)$, $\chi_k^{(i)}$ визначаються із системи парних інтегральних рівнянь, ці інтегральні рівняння, у свою чергу, зводяться до системи інтегральних рівнянь Фредгольма II роду. Отриману систему розв'язуємо методом послідовних наближень. Якщо $R_1 = R_2 = R$ то задача зводиться до задачі про тиск пружного штампу радіуса R в пружний штамп товщиною h_1 з початковими напруженнями. Із одержаних розв'язків у випадку потенціалів найпростішої структури (потенціали: гармонічний, Бартенєва-Хазановича, Трелоара) можна одержати ряд випадків:

а) при $\lambda_1 = 1$ одержимо розв'язок задачі про тиск двох пружних штампів кінечної довжини на шар без початкових напружень, розв'язок якого поданий в [2]

б) при $\nu_1, \nu_2 \to -1$ і $\lambda_1 = 1$ одержимо розв'язок задачі про тиск двох жорстких штампів на шар без початкових напружень

Висновки

На основі аналітичного і числового аналізу випливає:

1. Початкові напруження в шарі при стиску $(\lambda_1 < 1)$ зменшують, а при розтязі $(\lambda_1 > 1)$ збільшують контактні зусилля і напруження в пружному штампі на 12-20 % залежно від видовження, що визначають початковий стан, зміщення при цьому, навпаки, при стиску збільшуються, а при розтязі зменшуються в тому ж процентному відношенні.
2. Зі збільшенням δ вплив початкових напружень в шарі на контактні зусилля різко зростає, а зміщення при $\delta > 8000$ набувають сталого значення.
3. При $h > 25$ з точністю 3-5% для довільних δ можна користуватися розв'язком для півпростору [1, 2].

Таким чином, розподіл напружень і зміщень в шарі і пружному штампі відрізняється від відповідного розподілу в лінійному і трансверсально-ізотропному пружному шарі без початкових напружень.

Список використаної літератури

1. Александров В.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками / В.М. Александров, С.М. Мхитарян. – М.: Наука, Гл.ред. физ.-мат. лит. ,1983. – 488с.
2. Гузь А.Н. Механика хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями / А.Н. Гузь. – Киев: Наук. думка, 1983. – 286 с.
3. Гузь А.Н. Контактная задача о давлении упругого штампа на упругое полупространство с начальными напряжениями / А.Н. Гузь, В.Б.Рудницький //Прикладная механика.–1984.–20,№8.–с.3-11.
4. Григоренко П.П. Шар з початковими напруженнями під дією двох жорстких штампів/ П.П. Григоренко, В.Б. Рудницький // Доп. АН УРСР., сер. А. Фіз.-мат. та техн. науки.-1990, №9 – С. 35-37.
5. Guz A.N., Babich S.Y., Rudnitsky V.B. Contact problems for elastic bodies with initial stresses: Focus on Ukrainian research// Appl. Mech. Reviews. – 1998.-51 , p. 343-371.
6. Guz A.N., Rudnitsky V.B. Contact problems for elastic bodies with initial (residual) stresses. Khmelnytsky: Publish Private Entrepreneur Melnyk A.A., 2004.-682 p.
7. Guz A.N., Rudnitsky V.B. Fundamentals of the contact interaction theory of elastic bodies with initial (residual) stresses. Khmelnytsky: Publish Private Entrepreneur Melnyk A.A., 2004.-682 p.
8. V. B. Rudnitsky, D. M. Maksimchuk Contact problem for two coaxial cylindrical punches which interact with the layer with initial (residual) stresses. // Вісник Хмельницького національного університету. Науковий журнал: Технічні науки. – Хмельницький: ХНУ, 5.2007, – с. 134-135.