УДК 517.91:532.2

О.М. НІКІТІНА
Чернівецький факультет НТУ «ХПІ»
М.І. ШИНКАРИК
Тернопільський національний економічний університет

СКІНЧЕННЕ ГІБРИДНЕ ІНТЕГРАЛЬНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ТИПУ ЛЕЖАНДРА-БЕССЕЛЯ-ФУР'Є НА СЕГМЕНТІ З ДВОМА ТОЧКАМИ СПРЯЖЕННЯ

Методом задачі Штурма-Ліувілля побудовано скінченне гібридне інтегральне перетворення, породжене на сегменті $(0, R_3]$ *з двома точками спряження гібридним диференціальним оператором Лежандра-Бесселя-Фур'є.*

Ключові слова: гібридний диференціальний оператор, задача Штурма-Ліувілля, гібридне інтегральне перетворення.

О.М. НИКИТИНА
Черновицкий факультет НТУ «ХПИ»
Н.И. ШИНКАРИК
Тернопольский нициональный экономический университет

КОНЕЧНОЕ ГИБРИДНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ТИПА ЛЕЖАНДРА-БЕССЕЛЯ-ФУРЬЕ НА СЕГМЕНТЕ С ДВУМЯ ТОЧКАМИ СОПРЯЖЕНИЯ

Методом задачи Штурма-Лиувилля построено конечное гибридное интегральное преобразование, порожденное на сегменте $(0, R_3]$ *с двумя точками сопряжения гибридным дифференциальным оператором Лежандра-Бесселя-Фурьє.*

Ключевые слова: гибридный дифференциальный оператор, задача Штурма-Лиувилля, гибридное интегральное преобразование.

O.M. NIKITINA
Chernivtsi department of National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute"
M.I. SHYNKARYK
Ternopil National |Economic University

FINITE HYBRID INTEGRAL TRANSFORM OF LEGENDRE-BESSEL-FOURIER TYPE ON THE SEGMENT WITH TWO POINTS OF CONJUGATION

By the method of Shtourm-Liouville problem it is introduced finite hybrid integral transform generated on the segment $(0, R_3]$ *with two points of conjugation by hybrid differential Legendre-Bessel-Fourier operator.*

Keywords: hybrid differential operator, Shtourm-Liouville problem, hybrid integral transfor.

Постановка проблеми

На сучасному етапі науково-технічного прогресу, особливо у зв'язку із широким застосуванням композитних матеріалів, виникає гостра потреба у вивченні фізико-технічних характеристик даних матеріалів, які знаходяться в різних умовах експлуатації, що математично приводить до задач інтегрування сепаратної системи диференціальних рівнянь другого порядку на кусково-однорідному інтервалі з відповідними початковими та крайовими умовами [1 – 3]. Одним із ефективних методів побудови інтегральних зображень аналітичних розв'язків алгоритмічного характеру таких задач є метод гібридних інтегральних перетворень. Основні положення теорії скінченних гібридних інтегральних перетворень закладено в роботі [4].

У цій статті побудовано скінченне гібридне інтегральне перетворення (СГІП), породжене на сегменті $(0, R_3]$ з двома точками спряження гібридним диференціальним оператором Лежандра-Бесселя-Фур'є.

Основна частина

Побудуємо на множині $I_2 = \{r : r \in (0, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, R_3); R_3 < \infty\}$ інтегральне перетворення, породжене гібридним диференціальним оператором (ГДО)

$$M_{\nu,\alpha}^{(\mu)} = \theta(r)\theta(R_1 - r)a_1^2 \Lambda_{(\mu)} + \theta(r - R_1)\theta(R_2 - r)a_2^2 B_{\nu,\alpha} + \theta(r - R_2)\theta(R_3 - r)a_3^2 \, d^2 \big/ dr^2 . \qquad (1)$$

У рівності (1) $\theta(x)$ – одинична функція Гевісайда [1], $\Lambda_{(\mu)}$ – узагальнений диференціальний оператор Лежандра [4]; $B_{\nu,\alpha}$ – диференціальний оператор Бесселя; $d^2 \big/ dr^2$ – диференціальний оператор Фур'є другого порядку (одновимірний диференціальний оператор Лапласа) [2].

Означення. Областю задання ГДО $M_{\nu,\alpha}^{(\mu)}$ назвемо множину G вектор-функцій $g(r)=\{g_1(r);g_2(r);g_3(r)\}$ з такими властивостями: 1) вектор-функція $f(r)=\{\Lambda_{(\mu)}[g_1];B_{\nu,\alpha}[g_2];g_3''\}$ неперервна на множині I_2; 2) функції $g_j(r)$ задовольняють крайові умови:

$$\lim_{r\to 0}[r^{\gamma}g_1(r)]=0,\quad (\alpha_{22}^3\frac{d}{dr}+\beta_{22}^3)g_3(r)|_{r=R_3}=0 \tag{2}$$

3) функції $g_j(r)$ задовольняють умови спряження:

$$[(\alpha_{j1}^k\frac{d}{dr}+\beta_{j1}^k)g_k(r)-(\alpha_{j2}^k\frac{d}{dr}+\beta_{j2}^k)g_{k+1}(r)]|_{r=R_k}=0;\ j,k=1,2. \tag{3}$$

Вважаємо, що виконані умови на коефіцієнти: $2\alpha+1>0$, $\nu\ge\alpha$; $(\mu)=(\mu_1,\mu_2)$, $\mu_1\ge\mu_2\ge 0$; $\alpha_{22}^3\ge 0$, $\beta_{22}^3\ge 0$, $\alpha_{22}^3+\beta_{22}^3\ne 0$; $\alpha_{jm}^k\ge 0$, $\beta_{jm}^k\ge 0$, $c_{jk}=\alpha_{2j}^k\beta_{1j}^k-\alpha_{1j}^k\beta_{2j}^k$, $c_{1k}\cdot c_{2k}>0$; $j,m,k=1,2$.

Для $u(r)\in G$ та $v(r)\in G$ має місце базова тотожність:

$$[u_k'(r)v_k(r)-u_k(r)v_k'(r)]|_{r=R_k}=\frac{c_{2k}}{c_{1k}}[u_{k+1}'(r)v_{k+1}(r)-u_{k+1}(r)v_{k+1}'(r)]|_{r=R_k}\ . \tag{4}$$

Якщо $v(r)\in G$, а умови спряження для $u(r)$ неоднорідні:

$$[(\alpha_{j1}^k\frac{d}{dr}+\beta_{j1}^k)u_k(r)-(\alpha_{j2}^k\frac{d}{dr}+\beta_{j2}^k)u_{k+1}(r)]|_{r=R_k}=\omega_{jk};\ j,k=1,2,$$

то базова тотожність має вигляд:

$$[u_k'(r)v_k(r)-u_k(r)v_k'(r)]|_{r=R_k}=\frac{c_{2k}}{c_{1k}}[u_{k+1}'(r)v_{k+1}(r)-u_{k+1}(r)v_{k+1}'(r)]|_{r=R_k}+$$

$$+c_{1k}^{-1}[(\alpha_{12}^k\frac{d}{dr}+\beta_{12}^k)v_{k+1}(r)|_{r=R_k}\ \omega_{2k}-(\alpha_{22}^k\frac{d}{dr}+\beta_{22}^k)v_{k+1}(r)|_{r=R_k}\ \omega_{1k}]. \tag{5}$$

Визначимо числа: $a_1^2\sigma_1=\frac{c_{11}c_{12}}{c_{21}c_{22}}\frac{R_1^{2\alpha+1}}{R_2^{2\alpha+1}}\frac{1}{shR_1}$, $\quad a_2^2\sigma_2=\frac{c_{12}}{c_{22}}\frac{1}{R_1^{2\alpha+1}}$, $\quad a_3^2\sigma_3=1$, вагову функцію:

$$\sigma(r)=\theta(r)\theta(R_1-r)\sigma_1 shr+\theta(r-R_1)\theta(R_2-r)\sigma_2 r^{2\alpha+1}+\theta(r-R_2)\theta(R_3-r)\sigma_3 \tag{6}$$

та скалярний добуток:

$$(u(r),v(r))=\int_0^{R_3}u(r)v(r)\sigma(r)dr\equiv\int_0^{R_1}u_1(r)v_1(r)\sigma_1 shrdr+\int_{R_1}^{R_2}u_2(r)v_2(r)\sigma_2 r^{2\alpha+1}dr+\int_{R_2}^{R_3}u_3(r)v_3(r)\sigma_3 dr. \tag{7}$$

Методом інтегрування частинами з використанням крайових умов (2) та базової тотожності (4) встановлюємо рівність:

$$(M_{\nu,\alpha}^{(\mu)}[u(r)],v(r))=(u(r),M_{\nu,\alpha}^{(\mu)}[v(r)]). \tag{8}$$

Рівність (8) означає, що ГДО $M_{\nu,\alpha}^{(\mu)}$ самоспряжений диференціальний оператор. Отже, його спектр дійсний. Оскільки ГДО $M_{\nu,\alpha}^{(\mu)}$ на множині I_2 не має особливої точки, то його спектр дискретний [6].

Припустимо, що власному числу β відповідає власна вектор-функція:

$$V_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta)=\sum_{k=1}^{3}\theta(r-R_{k-1})\theta(R_k-r)V_{\nu,\alpha;k}^{(\mu)}(r,\beta),\quad R_0=0. \tag{9}$$

Тоді функції $V_{\nu,\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta)$ повинні задовольняти відповідно диференціальні рівняння

$$(\Lambda_{(\mu)}+b_1^2)V_{\nu,\alpha;1}^{(\mu)}(r,\beta)=0,\quad r\in(0,R_1),$$

$$(B_{\nu,\alpha} + b_2^2)V_{\nu,\alpha;2}^{(\mu)}(r,\beta) = 0, \quad r \in (R_1, R_2), \tag{10}$$

$$(\frac{d^2}{dr^2} + b_3^2)V_{\nu,\alpha;3}^{(\mu)}(r,\beta) = 0, \quad r \in (R_2, R_3),$$

крайові умови (2) та умови спряження (3); $b_j = a_j^{-1}(\beta^2 + k_j^2)^{1/2}$, $k_j^2 \geq 0$, $j = \overline{1,3}$.

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Лежандра утворюють узагальнені приєднані функції Лежандра $P_{\nu_1^*}^{(\mu)}(chr)$ та $L_{\nu_1^*}^{(\mu)}(chr)$, $\nu_1^* = -1/2 + ib_1$ [4]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Бесселя утворюють дійсні функції Бесселя першого роду $J_{\nu,\alpha}(b_2 r)$ та другого роду $N_{\nu,\alpha}(b_2 r)$ [3]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Фур'є утворюють функції $\cos(b_3 r)$ та $\sin(b_3 r)$ [2].

Наявність фундаментальної системи розв'язків дозволяє в силу лінійності спектральної задачі відшукувати функції $V_{\nu,\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta)$ у вигляді лінійної комбінації фундаментальної системи розв'язків:

$$V_{\nu,\alpha;1}^{(\mu)}(r,\beta) = A_1 P_{\nu_1^*}^{(\mu)}(chr) + B_1 L_{\nu_1^*}^{(\mu)}(chr), r \in (0, R_1),$$

$$V_{\nu,\alpha;2}^{(\mu)}(r,\beta) = A_2 J\nu,\alpha(b_2 r) + B_2 N_{\nu,\alpha}(b_2 r), r \in (R_1, R_2), \tag{11}$$

$$V_{\nu,\alpha;3}^{(\mu)}(r,\beta) = A_3 \cos(b_3 r) + B_3 \sin(b_3 r), r \in (R_2, R_3).$$

Умова обмеження в точці $r = 0$ вимагає $B_1 = 0$. Для визначення величин A_j ($j = \overline{1,3}$) та $B_k (k = 2,3)$ умови спряження (3) й крайова умова в точці $r = R_3$ дають однорідну алгебраїчну систему п'яти рівнянь:

$$Z_{\nu_1^*;j1}^{(\mu);11}(chR_1)A_1 - u_{\nu,\alpha;j2}^{11}(b_2 R_1)A_2 - u_{\nu,\alpha;j2}^{12}(b_2 R_1)B_2 = 0, j = 1,2,$$

$$u_{\nu,\alpha;j1}^{21}(b_2 R_2)A_2 + u_{\nu,\alpha;j1}^{22}(b_2 R_2)B_2 - v_{j2}^{21}(b_3 R_2)A_3 - v_{j2}^{22}(b_3 R_2)B_3 = 0, \tag{12}$$

$$v_{22}^{31}(b_3 R_3)A_3 + v_{22}^{32}(b_3 R_3)B_3 = 0.$$

Введемо до розгляду функції: $\delta_{\nu,\alpha;jk}(b_2 R_1, b_2 R_2) = u_{\nu,\alpha;j2}^{11}(b_2 R_1)u_{\nu,\alpha;k1}^{22}(b_2 R_2) - u_{\nu,\alpha;j2}^{12}(b_2 R_1) \times$ $\times u_{\nu,\alpha;k1}^{21}(b_2 R_2); j,k = 1,2,$ $\delta_{j2}(b_3 R_2, b_3 R_3) = v_{j2}^{21}(b_3 R_2)v_{22}^{32}(b_3 R_3) - v_{j2}^{22}(b_3 R_2)v_{22}^{31}(b_3 R_3); j = 1,2;$

$$a_{\nu,\alpha;j}^{(\mu)}(\beta) = Z_{\nu_1^*;11}^{(\mu);11}(chR_1)\delta_{\nu,\alpha;2j}(b_2 R_1, b_2 R_2) - Z_{\nu_1^*;21}^{(\mu);11}(chR_1)\delta_{\nu,\alpha;1j}(b_2 R_1, b_2 R_2),$$

$$b_{\nu,\alpha;j}(\beta) = \delta_{22}(b_3 R_2, b_3 R_3)\delta_{\nu,\alpha;j1}(b_2 R_1, b_2 R_2) - \delta_{12}(b_3 R_2, b_3 R_3)\delta_{\nu,\alpha;j2}(b_2 R_1, b_2 R_2).$$

Для того, щоб алгебраїчна система мала ненульовий розв'язок, необхідно й досить, щоб визначник системи дорівнював нулю [5]:

$$\delta_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(\beta) \equiv Z_{\nu_1^*;11}^{(\mu);11}(chR_1)b_{\nu,\alpha;2}(\beta) - Z_{\nu_1^*;21}^{(\mu);11}(chR_1)b_{\nu,\alpha;1}(\beta) = 0. \tag{13}$$

Ми одержали трансцендентне рівняння для обчислення власних чисел β_n ГДО $M_{\nu,\alpha}^{(\mu)}$.

Підставимо в систему (12) $\beta = \beta_n$ ($b_j(\beta_n) \equiv b_{jn}$) й відкинемо останнє рівняння в силу лінійної залежності. Для визначення величин A_2, B_2 маємо алгебраїчну систему двох рівнянь:

$$u_{\nu,\alpha;j2}^{11}(b_{2n} R_1)A_2 + u_{\nu,\alpha;j2}^{12}(b_{2n} R_1)B_2 = A_1 Z_{\nu_{1n}^*;j1}^{(\mu);11}(chR_1); j = 1,2. \tag{14}$$

Визначник алгебраїчної системи (14) обчислюється безпосередньо:

$$u_{\nu,\alpha;12}^{11}(b_{2n} R_1)u_{\nu,\alpha;22}^{12}(b_{2n} R_1) - u_{\nu,\alpha;22}^{11}(b_{2n} R_1)u_{\nu,\alpha;12}^{12}(b_{2n} R_1) = \frac{2}{\pi}\frac{c_{21}}{b_{2n}^{2\alpha} R_1^{2\alpha+1}} \equiv q_\alpha(\beta_n) \neq 0.$$

Алгебраїчна система (14) має єдиний розв'язок [5]:

$$A_2 = \frac{A_1}{q_\alpha(\beta_n)}[Z^{(\mu);11}_{\overset{*}{\nu}_{1n};11}(chR_1)u^{12}_{\nu,\alpha;22}(b_{2n}R_1) - Z^{(\mu);11}_{\overset{*}{\nu}_{1n};21}(chR_1)u^{12}_{\nu,\alpha;12}(b_{2n}R_1)], \tag{15}$$

$$B_2 = \frac{A_1}{q_\alpha(\beta_n)}[Z^{(\mu);11}_{\overset{*}{\nu}_{1n};21}(chR_1)u^{11}_{\nu,\alpha;12}(b_{2n}R_1) - Z^{(\mu);11}_{\overset{*}{\nu}_{1n};11}(chR_1)u^{11}_{\nu,\alpha;22}(b_{2n}R_1)], \quad \overset{*}{\nu}_{1n} = -1/2 + ib_{1n}.$$

При відомих A_2, B_2 для визначення A_3, B_3 маємо алгебраїчну систему двох рівнянь:

$$v^{21}_{j2}(b_{3n}R_2)A_3 + v^{22}_{j2}(b_{3n}R_2)B_3 = -A_1[q_\alpha(\beta_n)]^{-1}a^{(\mu)}_{\nu,\alpha;j}(\beta_n); j = 1,2. \tag{16}$$

Алгебраїчна система (16) має єдиний розв'язок [5]:

$$A_1 = q_\alpha(\beta_n)c_{22}b_{3n}, \quad A_3 = \omega^{(\mu)}_{\nu,\alpha;2}(\beta_n), \quad B_3 = -\omega^{(\mu)}_{\nu,\alpha;1}(\beta_n), \tag{17}$$

$$\omega^{(\mu)}_{\nu,\alpha;j}(\beta_n) = a^{(\mu)}_{\nu,\alpha;2}(\beta_n)v^{2j}_{12}(b_{3n}R_2) - a^{(\mu)}_{\nu,\alpha;1}(\beta_n)v^{2j}_{22}(b_{3n}R_2), j = 1,2.$$

Підставимо визначені формулами (15), (17) величини A_j та B_k $(j = \overline{1,3}, k = 2,3)$ у рівності (11). Одержимо функції: $V^{(\mu)}_{\nu,\alpha;1}(r,\beta_n) = q_\alpha(\beta_n)c_{22}b_{3n}$, $V^{(\mu)}_{\nu,\alpha;2}(r,\beta_n) = c_{22}b_{3n}[Z^{(\mu);11}_{\overset{*}{\nu}_{1n};21}(chR_1)\psi^1_{\nu,\alpha;12}(b_{2n}R_1, b_{2n}r) -$

$$- Z^{(\mu);11}_{\overset{*}{\nu}_{1n};11}(chR_1)\psi^1_{\nu,\alpha;22}(b_{2n}R_1, b_{2n}r)],\ \psi^1_{\nu,\alpha;j2}(b_{2n}R_1, b_{2n}r) = u^{11}_{\nu,\alpha;j2}(b_{2n}R_1)N_{\nu,\alpha}(b_{1n}r) -$$

$$- u^{12}_{\nu,\alpha;j2}(b_{2n}R_1)J_{\nu,\alpha}(b_{1n}r),\ V^{(\mu)}_{\nu,\alpha;3}(r,\beta_n) = \omega^{(\mu)}_{\nu,\alpha;2}(\beta_n)\cos(b_{3n}r) - \omega^{(\mu)}_{\nu,\alpha;1}(\beta_n)\sin(b_{3n}r). \tag{18}$$

Згідно формули (9) спектральна вектор-функція $V^{(\mu)}_{\nu,\alpha}(r,\beta_n)$ визначена (стає відомою). Її квадрат норми обчислюється за формулою:

$$\| V^{(\mu)}_{\nu,\alpha}(r,\beta_n) \|^2 = (V^{(\mu)}_{\nu,\alpha}(r,\beta_n), V^{(\mu)}_{\nu,\alpha}(r,\beta_n)) \equiv \int_0^{R_3} [V^{(\mu)}_{\nu,\alpha}(r,\beta_n)]^2 \sigma(r)dr =$$

$$= \int_0^{R_1} [V^{(\mu)}_{\nu,\alpha;1}(r,\beta_n)]^2 \sigma_1 shrdr + \int_{R_1}^{R_2} [V^{(\mu)}_{\nu,\alpha;2}(r,\beta_n)]^2 \sigma_2 r^{2\alpha+1}dr + \int_{R_2}^{R_3} [V^{(\mu)}_{\nu,\alpha;3}(r,\beta_n)]^2 \sigma_3 dr. \tag{19}$$

Згідно з роботою [7] сформулюємо такі твердження.

Теорема 1 (про дискретний спектр). Корені β_n трансцендентного рівняння $\delta^{(\mu)}_{\nu,\alpha}(\beta) = 0$ складають дискретний спектр ГДО $M^{(\mu)}_{\nu,\alpha}$: дійсні, різні, симетричні відносно нуля й на піввісі $\beta > 0$ утворюють монотонно зростаючу числову послідовність з єдиною граничною точкою $\beta = \infty$.

Теорема 2 (про дискретну функцію). Система власних функцій $\{V^{(\mu)}_{\nu,\alpha}(r,\beta_n)\}^\infty_{n=1}$ ортогональна на множині I_2 з ваговою функцією $\sigma(r)$, повна й замкнена.

У подальшому перейдемо до ортонормованої системи власних функцій

$$\{v^{(\mu)}_{\nu,\alpha}(r,\beta_n)\}^\infty_{n=1} = \{V^{(\mu)}_{\nu,\alpha}(r,\beta_n) : \| V^{(\mu)}_{\nu,\alpha}(r,\beta_n) \|\}^\infty_{n=1}.$$

Теорема 3 (про зображення рядом Фур'є). Будь-яка вектор-функція $g(r) \in G$ зображається за системою $\{v^{(\mu)}_{\nu,\alpha}(r,\beta_n)\}^\infty_{n=1}$ абсолютно й рівномірно збіжним на множині I_2 рядом Фур'є:

$$g(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{R_3} g(\rho)v^{(\mu)}_{\nu,\alpha}(\rho,\beta_n)\sigma(\rho)d\rho\, v^{(\mu)}_{\nu,\alpha}(r,\beta_n). \tag{20}$$

Ряд Фур'є (20) визначає пряме $H^{(\mu)}_{\nu,\alpha}$ й обернене $H^{-(\mu)}_{\nu,\alpha}$ скінченне гібридне інтегральне перетворення (СГІП), породжене на множині I_2 ГДО $M^{(\mu)}_{\nu,\alpha}$:

$$H_{\nu,\alpha}^{(\mu)}[g(r)] = \int_0^{R_3} g(r) v_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta_n)\sigma(r)dr \equiv \tilde{g}_n, \tag{21}$$

$$H_{\nu,\alpha}^{-(\mu)}[\tilde{g}_n] = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{g}_n v_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta_n) \equiv g(r). \tag{22}$$

Визначимо величини та функції: $d_1 = a_1^2\sigma_1 shR_1 : c_{11}, d_2 = a_2^2\sigma_2 R_2^{2\alpha+1} : c_{12}, \tilde{g}_{1n} = \int_0^{R_1} g_1(r) v_{\nu,\alpha;1}^{(\mu)}(r,\beta_n)\sigma_1 shrdr,$

$$\tilde{g}_{2n} = \int_{R_1}^{R_2} g_2(r) v_{\nu,\alpha;2}^{(\mu)}(r,\beta_n)\sigma_2 r^{2\alpha+1}dr, \tilde{g}_{3n} = \int_{R_2}^{R_3} g_3(r) v_{\nu,\alpha;3}^{(\mu)}(r,\beta_n)\sigma_3 dr,$$

$$Z_{\nu,\alpha;m2}^{(\mu);k}(\beta_n) = (\alpha_{m2}^k \frac{d}{dr} + \beta_{m2}^k) v_{\nu,\alpha;k+1}^{(\mu)}(r,\beta_n)|_{r=R_k}; m,k = 1,2.$$

Теорема 4 (про основну тотожність). Якщо вектор-функція $f(r) = \{\Lambda_{(\mu)}[g_1(r)]; B_{\nu,\alpha}[g_2(r)]; g_3''(r)\}$ неперервна на множині I_2, а функції $g_j(r)$ задовольняють крайові умови:

$$\lim_{r\to 0}\left[shr(\frac{dg_1}{dr} v_{\nu,\alpha;1}^{(\mu)} - g_1 \frac{dv_{\nu,\alpha;1}^{(\mu)}}{dr})\right] = 0, [(\alpha_{22}^3 \frac{d}{dr} + \beta_{22}^3) g_3(r)]|_{r=R_3} = g_R \tag{23}$$

та умови спряження:

$$[(\alpha_{j1}^k \frac{d}{dr} + \beta_{j1}^k) g_k(r) - (\alpha_{j2}^k \frac{d}{dr} + \beta_{j2}^k) g_{k+1}(r)]|_{r=R_k} = \omega_{jk}; j,k = 1,2, \tag{24}$$

то має місце основна тотожність СГІП ГДО $M_{\nu,\alpha}^{(\mu)}$:

$$H_{\nu,\alpha}^{(\mu)}[M_{\nu,\alpha}^{(\mu)}[g(r)]] = -\beta_n^2 \tilde{g}_n - \sum_{i=1}^{3} k_i^2 \tilde{g}_{in} + (\alpha_{22}^3)^{-1} v_{\nu,\alpha;3}^{(\mu)}(R_3,\beta_n) g_R +$$
$$+ \sum_{k=1}^{2} d_k [Z_{\nu,\alpha;12}^{(\mu);k}(\beta_n)\omega_{2k} - Z_{\nu,\alpha;22}^{(\mu);k}(\beta_n)\omega_{1k}]. \tag{25}$$

Висновки

Одержані формули (21), (22) та (25) складають математичний апарат для побудови інтегрального зображення точного аналітичного розв'язку відповідних крайових задач математичної фізики кусково-однорідних середовищ.

Список використаної літератури

1. Коляно Ю.М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела / Ю. М. Коляно. К.: Наук. думка, 1992. – 280 с.
2. Ленюк М.П. Температурні поля в плоских кусково-однорідних ортотропних областях / М.П. Ленюк. – К.: Ін-т математики НАН України, 1997. – 188 с.
3. Конет І.М. Температурні поля в кусково-однорідних циліндричних областях / І.М. Конет. М.П. Ленюк. – Чернівці: Прут, 2004. – 276 с.
4. Комаров Г.М. Скінченні гібридні інтегральні перетворення, породжені диференціальними рівняннями другого порядку / Г.М. Комаров, М.П. Ленюк, В.В. Мороз. – Чернівці: Прут, 2001. – 228 с.
5. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс / Г.Е. Шилов. – М.: Наука, 1965. – 328 с.
6. Конет І.М. Інтегральні перетворення типу Мелера-Фока / І.М. Конет, М.П. Ленюк. – Чернівці: Прут, 2002. – 248 с.
7. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений / В.В. Степанов. – М.: Физматгиз, 1959. – 468 с.
8. Ленюк М.П. Исследование основных краевых задач для диссипативного волнового уравнения Бесселя / М.П. Ленюк. – Киев, 1983. – 62 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.3).
9. Курош А.Г. Курс высшей алгебры / А.Г. Курош. – М.: Наука, 1971. – 432 с.