УДК 517.929.7

А.П. СЛЕСАРЕНКО
Інститут проблем машинобудування ім. О.М. Підгорного НАНУ
О. П. ДЕМ'ЯНЧЕНКО
Азовський морський інститут Одеської національної морської академії
В.П. ЛЯШЕНКО, О.Б. КОБИЛЬСЬКА
Кременчуцький національний університет імені Михайла Остроградського

ЧИСЕЛЬНО - АНАЛІТИЧНИЙ МЕТОД У МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЯХ ВИСОКОТЕМПЕРАТУРНИХ ПРОЦЕСІВ

Запропоновано чисельно-аналітичний метод дослідження математичної моделі високотемпературного процесу. Модель розглядається у вигляді нелінійної початково - крайової задачі для нестаціонарного рівняння теплопровідності у неканонічній, з геометричної точки зору, області. Для дослідження температурного розподілу застосовано регіонально-структурний метод. Нестаціонарна задача методом Рот, зводиться до сукупності крайових задач для лінеаризованих різницевих рівнянь для рівняння теплопровідності, які, у свою чергу, методом зважених неув'язок Гальоркіна зводяться до системи алгебраїчних рівнянь. Запропонований метод може бути застосований при дослідженні температурних процесів, що протікають у складних з геометричної точки зору, областях, шляхом зведення складної області до підобластей - регіонів.

Ключові слова: математична модель, неканонічна область, регіонально - структурний метод, метод Роте, метод зважених неув'язок Гальоркіна.

А.П. СЛЕСАРЕНКО
Институт проблем машиностроения им. А.М. Подгорного НАНУ
О. П. ДЕМЬЯНЧЕНКО
Азовский морской институт Одесской национальной морской академии
В.П. ЛЯШЕНКО, Е.Б. КОБЫЛЬСКАЯ
Кременчугский национальный университет имени Михаила Остроградского

ЧИСЛЕННО - АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД В МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНЫХ ПРОЦЕССОВ

Предложен численно-аналитический метод исследования математической модели высокотемпературного процесса. Модель рассматривается в виде нелинейной начально - краевой задачи для нестационарного уравнения теплопроводности в неканонической, с геометрической точки зрения, области. Для исследования температурного распределения применен регионально-структурный метод. Нестационарная задача методом Роте сводится к совокупности краевых задач для линеаризованных разностных уравнений для уравнения теплопроводности, которые, в свою очередь, методом взвешенных неувязок Галеркина сводятся к системе алгебраических уравнений. Предложенный метод может быть применен при исследовании температурных процессов, протекающих в сложных с геометрической точки зрения, областях, путем сведения сложной области к совокупности подобластей - регионов.

Ключевые слова математическая модель, неканоническая область, регионально - структурный метод, метод Роте, метод взвешенных неувязок Галеркина.

A. SLESARENKO
Institute of Mechanical Engineering Problems Named After Pidhorny, Ukrainian Academy of Sciences
O. DEMYANCHENKO
Azov maritime institute Odesa national maritime akademy
V. LYASHENKO, E. KOBILSKAYA
Kremenchuk Mykhailo Ostrohradskyi national university

NUMERICAL ANALYTICAL METHODS IN MATHEMATICAL MODELS OF HIGH-TEMPERATURE PROCESSES

Numerical-analytical method proposed for the study of the mathematical model of high-temperature process. The model is considered as a nonlinear initial - boundary value problem for a nonstationary heat equation in non-canonical, from the geometrical point of view, the area. To study the temperature distribution applied regionalno strukturniy method. Non-stationary problem Rothe reduced to a set of boundary value problems for the linearized differential equations for the heat equation, which, in turn, by the Galerkin weighted discrepancies are reduced to a system of algebraic equations. The proposed method can be applied in the study of thermal processes *in the complex from a geometrical point of view, the areas by reducing the complex field to a set of sub-areas - regions.*

Keywords: mathematical model, non-canonical region, regionally - structural method, Rothe method Galerkin weighted inconsistencies.

Загальна постановка питання і його актуальність

Дослідження високоінтенсивних теплових процесів, що протікають в таких галузях промисловості, як енергетика, машинобудування, металургія, де мають місце великі градієнти температур, а теплофізичні властивості матеріалів, як правило, залежать від температури, виникає необхідність розв'язання нелінійних задач теплопровідності, які є моделями цих процесів [1-4]. Якщо тепловий процес протікає у канонічній, з геометричної точки зору, області і умови теплообміну дозволяють представити модель у вигляді першої або другої початково-крайової задачі, то її розв'язок можна шукати методами інтегральних перетворень або методом Фур'є [5]. Незважаючи на успіхи класичної аналітичної теорії теплопровідності, її можливості обмежені.

Аналіз існуючих досліджень

Існуючі аналітичні методи розв'язання лінійних крайових задач теплопровідності досить добре вивчені і відомі [1,5]. Труднощі починають виникати коли математична модель приводить до розв'язання нелінійної або нелокальної задачі для рівняння теплопровідності. Вони пов'язані з урахуванням залежності коефіцієнтів рівняння теплопровідності і граничних умов від температури і координат, складнощів геометричної форми тіла. Їх класичними аналітичними методами подолати практично неможливо. Коли при теплообміні процес нагрівання або охолодження відбувається шляхом випромінювання, а тепловий потік залежить від температури за законом Стефана-Больцмана, задачу можна лінеаризувати [6,7]. Заміна цих залежностей лінійним законом Ньютона у багатьох випадках може призвести до помилок. Тому більшість виникаючих на практиці задач не може бути розв'язана методами класичної теорії теплопровідності, які, щоправда, після лінеаризації математичної моделі можуть бути використані для тестування розв'язків більш складних задач.

Більш широкі можливості мають чисельні методи: кінцево-різницеві та метод кінцевих елементів. Вони дозволяють ефективно досліджувати нелінійну математичну модель для тіл складної форми із застосуванням комп'ютерної техніки [8,9]. Деякі нестаціонарні нелінійні задачі, до розв'язання яких зводиться дослідження змінних теплових процесів, допускають точний аналітичний розв'язок, і то для найпростіших конструктивних елементів і порівняно простих крайових умов . Тому виникає необхідність у розвитку наближених чисельно-аналітичних методів дослідження змінних у просторі та часі теплових процесів. Тут розглядаються питання спільного застосування регіонально-структурного і проекційних методів до розв'язання нелінійних нестаціонарних задач теплопровідності для неканонічних областей. При цьому точно враховується геометрична інформація і точно задовольняються нелінійні граничні умови в задачах теплопровідності для областей складної форми.

Мета дослідження

Побудова різницевої схеми крайової задачі для рівняння теплопровідності у неканонічній області.

Матеріали дослідження

Розглянемо нелінійну задачу для нестаціонарного рівняння теплопровідності в області $\Omega_t : \{\Gamma_1 \cup \Gamma_2, 0 < t \le \tau\}$

$$c\rho(T)\frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}\big(\lambda(T)\nabla T\big) + F(T)\,; \tag{1}$$

$$T(0) = T_0\,; \tag{2}$$

$$T\Big|_{\Gamma_1} = \varphi_0, \quad -\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2} = \alpha\left(T - T_{\text{ср}}\right) + \varepsilon\sigma\left(T^4 - T_{\text{ср}}^4\right)\,, \tag{3}$$

де Γ_1,Γ_2– кусково-гладкі поверхні.

Скориставшись методом Роте проведемо дискретизацію частинної похідної за часом

$$\frac{\partial\, T}{\partial\, t} \approx \frac{T_{s+1} - T_s}{\Delta t}, \quad \Delta t = \frac{\tau}{m},$$

Після дискретизації на кожному часовому шарі отримаємо задачу

$$-\operatorname{div}\left(\lambda\left(T_{s+1}\right)\nabla T_{s+1}\right)+\frac{c\rho\left(T_{s+1}\right)}{\Delta\, t}T_{s+1}-F\left(T_{s+1}\right)-\frac{c\rho\left(T_{s+1}\right)}{\Delta\, t}T_{s}=0; \quad (4)$$

$$T_{s+1}\Big|_{\Gamma_1}=\varphi_0, \quad -\lambda(T)\frac{\partial T_{s+1}}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2}=\alpha\left(T-T_{\text{ср}}\right)+\varepsilon\sigma\left(T^4-T_{\text{ср}}^4\right). \quad (5)$$

Задачу (4),(5) розв'язуємо методом послідовних наближень [9–12]

$$-\operatorname{div}\left(\lambda\left(T_{s+1}^{k}\right)\nabla T_{s+1}^{k+1}\right)+\gamma_{s+1}^{k}T_{s+1}^{k+1}-F_{s+1}^{k}=0; \quad (6)$$

$$T_{s+1}^{k+1}\Big|_{\Gamma_1}=\phi_0; \quad (7)$$

$$-\lambda\left(T_{s+1}^{k+1}\right)\frac{\partial T_{s+1}^{k+1}}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2}=\alpha_{s+1}^{k}\left(T_{s+1}^{k+1}-T_{\text{ср},s+1}^{k}\right), \quad (8)$$

де $\gamma_{s+1}^{k}=\dfrac{c\rho\left(T_{s+1}^{k}\right)}{\Delta\, t}$, $\quad F_{s+1}^{k}=F\left(T_{s+1}^{k}\right)+\dfrac{c\rho\left(T_{s+1}^{k}\right)}{\Delta\, t}T;\ \alpha_{s+1}^{k}=\alpha+\varepsilon\sigma\left(T_{s+1}^{k}\right)^3, \quad T_{\text{ср,s+1}}^{k}=\dfrac{\alpha T_{\text{ср}}+\varepsilon\sigma T_{\text{ср}}^4}{\alpha_{s+1}^{k}}.$

Тут на кожному *s*-му часовому шарі задача (6),(8) зводиться до розв'язання сукупності лінійних крайових задач, структура розв'язків яких має вигляд [13]

$$T_{s+1}^{k+1}=\Phi_0+\sum_{i=1}^{\mathrm{n}}C_{i,s+1}^{k+1}\phi_i, \quad (9)$$

де $\Phi_0 = \varphi_0$ на Γ_1; $\varphi = 0$ на Γ_2, φ_i, $i=1\div n$ – повна лінійно незалежна система функций.

Скориставшись методом зважених неув'язок у формі Гальоркіна, отримаємо лінійну систему алгебраїчних рівнянь відносно компонентів вектора C_{s+1}^{k+1}

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}C_{s+1,i}^{k+1}\Big\{&\int_{\Omega}\left[\lambda\left(T_{s+1}^{k}\right)\nabla\phi_i\nabla\phi_j+\gamma_{s+1}^{k}\phi_i\phi_j\right]d\Omega+\int_{\Gamma_2}\alpha_{s+1}^{k}\phi_i\phi_j\,d\,\Gamma_2\Big\}=\\ &=-\int_{\Omega}\left[\lambda\left(T_{s+1}^{k}\right)\nabla\Phi_0\nabla\phi_j+\gamma_{s+1}^{k}\Phi_0\phi_j-F_{s+1}^{k}\phi_j\right]d\Omega+\\ &+\int_{\Gamma_2}\alpha_{s+1}^{k}\left(T_{\text{ср},s+1}^{k}-\Phi_0\right)\phi_j\,d\Gamma_2,\ j=\overline{1,n},\quad k=0,1,2,...,s=\overline{0,m-1}.\end{aligned} \quad (10)$$

Проводячи послідовно ітерації (9) до тих пір, поки два вектора C_{s+1}^{k+1} і C_{s+1}^{k} не стануть близькі в будь-якому сенсі, будемо мати розподіл температури в (s + 1) -й момент часу. Наприклад, при переході до наступного часового шару обчислюються норми різниці $\left\|T_{s+1}-T_s\right\|$ для попереднього і подальшого кроків і перевіряється виконання нерівності $\left\|T_{s+1}-T_s\right\|<\varepsilon$, де $\varepsilon>0$ - попередньо задана величина. Якщо ця нерівність не виконується, то крок за часом Δt зменшується у 2 рази і послідовно проводяться ітерації. Даний алгоритм дозволяє автоматизувати процес вибірки кроку за часом і зменшити їх кількість на відрізку, де початкове значення T_0 вже не робить істотного впливу на розподіл температури, або на відрізку з відносно малим температурним градієнтом.

Якщо розглянута область Ω має досить складну форму, то найбільш ефективним виявляється регіонально-структурний метод [14,15]. У цьому випадку область Ω розбивається на ряд непересічних підобластей регіонів Ω_p $p=1\div n$. так, щоб конфігурація регіону Ω_p була б опуклою і по можливості простою. Для кожного з регіонів окремо будуються регіональні структури розв'язків [14], $T_p=\Phi_{0p}+\sum\limits_{i,j}C_{i,j}^{p}\chi_{i,j}^{p}$ що точно задовольняють нелінійним регіональним граничним умовам і «умовам сполучення» на кордонах контакту регіонів при будь-якому наборі невідомих компонентів для кожного з регіонів Ω_p. Компоненти $C_{i,j}^{p}$ визначаються із системи алгебраїчних рівнянь (10).

У регіонально-аналітичних структурах розв'язання нелінійних крайових задач теплопровідності випромінюючих тепло тіл неканонічної форми і нелінійних задач теплообміну з внутрішніми джерелами енергії геометричні та фізичні параметри входять в явному вигляді, що досягається завдяки точному розв'язанню оберненої задачі диференціальної геометрії з використанням S-функцій на регіонально-аналітичному рівні . Це вигідно відрізняє запропоновані регіонально-аналітичні структури розв'язання даних задач від чисельних методів і відкриває нові якісні можливості при оптимізації теплофізичних режимів.

Розглянуті підходи дозволяють проводити математичне моделювання нелінійних нестаціонарних теплових процесів в обмежених тілах, що мають складний поперечний переріз в діалоговому режимі з комп'ютером. Особливу науково-технічну цінність наближені аналітичні та чисельно-аналітичні розв'язки багатовимірних нелінійних нестаціонарних задач теплопровідності набувають у зв'язку з розробкою нових інформаційних технологій організації баз даних теплового стану конструктивних елементів при зміні їх геометричних параметрів та характеру взаємодії з навколишнім середовищем. У цьому випадку використання пропонованих підходів до моделювання теплових процесів передбачає обчислення і зберігання в базі даних тільки коефіцієнтів для невеликого числа членів відповідних наближених аналітичних розв'язків задач теплопровідності. Тому при аналізі тисяч варіантів теплових режимів даний підхід дозволяє значно розширити обсяги аналізу, переробки та зберігання інформації у базах даних. Це може вигідно його відрізняти у порівнянні з чисельними методами.

Проведені чисельні розрахунки температурних розподілів в областях, що мають складну геометричну форму з використанням регіонально-структурного методу (Рис.1).

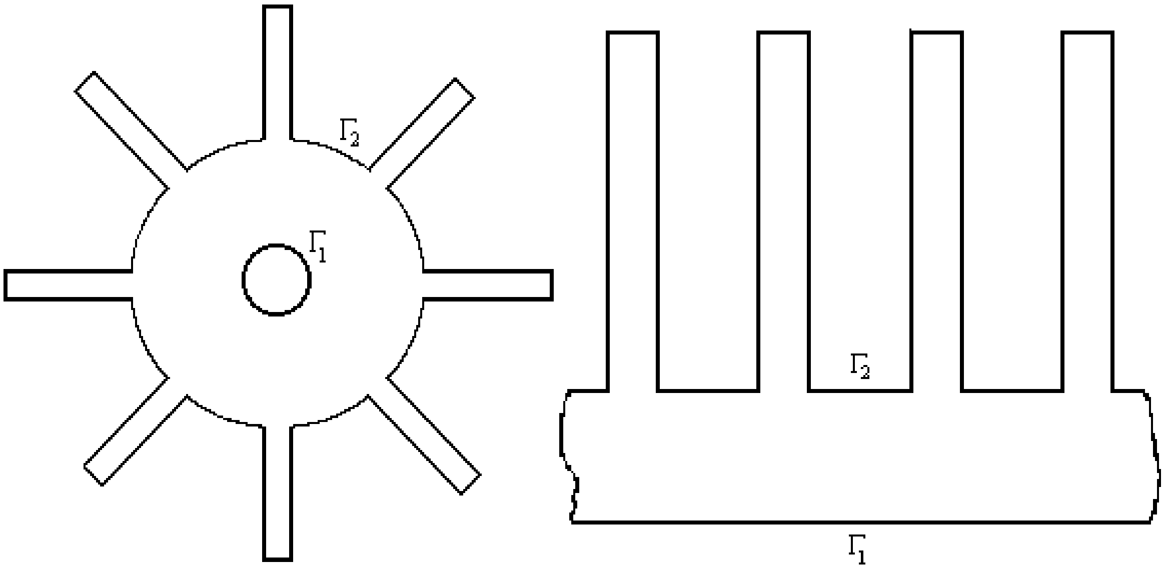

Рис1. Поперечний переріз тіла , що має складну геометричну форму.

Поверхня, переріз якої зображений на рисунку, розбивається на кілька простих поверхонь – регіонів, що мають просту геометричну форму. Математична модель температурного розподілу тіла, що має складну геометричну форму, розглядається у вигляді суперпозиції математичних моделей тіл, обмежених поверхнями канонічної форми, з умовами спряження на границях розбиття поверхні складної форми.

Висновки

Запропоновано метод дослідження математичної моделі високотемпературного процесу. Модель розглядається у вигляді нелінійної початково - крайової задачі для нестаціонарного рівняння теплопровідності у неканонічній, з геометричної точки зору, області. Для дослідження температурного розподілу застосовано регіонально-структурний метод. Нестаціонарна задача методом Роте зводиться до сукупності крайових задач для лінеаризованих різницевих рівнянь для рівняння теплопровідності, які у свою чергу методом зважених неув'язок Гальоркіна зводяться до системи алгебраїчних рівнянь. Запропонований метод може бути застосований при дослідженні температурних процесів, що протікають у складних, з геометричної точки зору, областях, шляхом зведення складної області до підобластей - регіонів .

Список використаної літератури

1. Карслоу Г., Егер Л. Теплопроводность твердых тел. – М.: Наука, 1964. – 488 с.
2. Мацевитый Ю. М., Слесаренко А.П. Некорректные многопараметрические задачи теплопроводности и регионально-структурная регуляризация их решений / Мацевитый Ю. М., Слесаренко А. П.: – Киев: Наук. Думка. 2014. – 336 с.
3. V. Lyashenko, T. Hryhorova Generalized Mathematical Model of Thermal Diffusion in Powder Metallurgy // AIP Conference Proceedings. – Sophia (Bulgaria), 2014. – 85(2014), P. 85-93.

4. V. Lyashenko, E. Kobilskaya Control of Heat Source in a Heat Conduction Problem // AIP Conference Proceedings. – Sophia (Bulgaria), 2014. – 85(2014), P. 94-101.
5. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. –Москва: Наука, 1972. – 736 с.
6. Сидоренко С.И., Березовский А.А., Волошко С.М. Нелинейные задачи массопереноса.:–Киев: Наук.Думка , 2002. – 448 с.
7. Ляшенко В.П., Григорова Т.А. Моделювання процесів спікання у контейнері. // Вестник Херсонского национального технического университета. Вып. 3(39). – Херсон: ХНТУ, 2010. – С. 292-296.
8. V.P. Lyshenko, M.V. Zagirnyak, T.A. Grigorova D. Miljavec Modeling the sintering of powder parts // Powder Metallurgy and Metal Ceramics, Vol. 49, Nos. 11-12, March, 2011. – P. 737-741.
9. Мацевитый Ю. М., Слесаренко А. П., Сафонов Н. А. Численно-аналитическое моделирование тепловых процессов в конструктивных элементах при нестационарных высокоинтенсивных тепловых нагрузках. // Пробл. машиностроения. – 2001. – № 1-2., С. 19-28.
10. Слесаренко А. П., Сафонов Н. А. Структурный метод в нестационарных нелинейных задачах теплопроводности для многосвязных областей // Докл. НАН Украины. – 1996. – № 1. – С. 27-30.
11. Слесаренко А. П., Сафонов Н. А. Регионально-структурный и проекционные методы в нелинейных краевых задачах теплопроводности для тел неканонической формы с источниками энергии // Проблемы машиностроения. – 1998. – Т. 1. № 1, С. 61-69.
12. Самарский А.А. Теория разностных систем.– М.: Наука, 1983. – 616 с.
13. Слесаренко А. П., Сафонов Н. А. Регионально-структурный и проекционные методы в нелинейных краевых задачах теплопроводности для тел неканонической формы с источниками энергии // Проблемы машиностроения. – 1998. – Т. 1. № 1, С. 61-69.
14. Слесаренко А.П., Сафонов Н.А. Нелинейные интегральные преобразования, регионально-структурный, проекционные и итерационные методы в нелинейной нестационарной задаче радиационно-конвективного теплообмена. Вестник ХГУ. – 2003. – № 590. С. 219-224.
15. Слесаренко А.П., Ганчин В.В. Регионально-аналитическое моделирование нелинейных нестационарных процессов теплопроводности в областях неканонической формы с неоднородной средой. Проблемы машиностроения. – 2003. – Т.6, № 3., С. 79-87.