

УДК 539.3

Л.А. ФИЛЬШТИНСКИЙ, Д.Н. НОСОВ, А.А. ЕРЕМЕНКО, Е.И. ОГЛОБЛИНА
Сумский государственный университет, Украина

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК РАЗРУШЕНИЯ В ПЬЕЗОМАГНИТНОЙ ПЛАСТИНЕ С ТРЕЩИНАМИ

Рассматривается краевая задача механики разрушения пьезомагнитной пластины, ослабленной трещинами. Предполагается, что на берегах трещин действует нормальное давление, а на бесконечности имеет место равномерное распределение механических напряжений и магнитной индукции. Задача сведена к системе сингулярных интегральных уравнений, которая решена численно методом механических квадратур. Проведены численные эксперименты, найдены коэффициенты интенсивности напряжений и магнитной индукции в вершинах трещин.

Ключевые слова: пьезомагнитная керамика, макротрещины, сингулярные интегральные уравнения, коэффициенты интенсивности полевых величин

Л.А. ФИЛЬШТИНСЬКИЙ, Д.М. НОСОВ, Г.А. ЄРЕМЕНКО, О.І. ОГЛОБЛІНА
Сумський державний університет, Україна

ВИЗНАЧЕННЯ ХАРАКТЕРИСТИК РУЙНУВАННЯ У П'ЄЗОМАГНІТНІЙ ПЛАСТИНІ З ТРІЩИНАМИ

Розглянуто крайову задачу механіки руйнування п'єзомагнітної пластини, яка послаблена тріщинами. Вважається, що на берегах тріщин діє нормальний тиск, а на нескінченності має місце рівномірний розподіл механічних напружень та магнітної індукції. Задача зведена до системи сингулярних інтегральних рівнянь, яка розв'язана чисельно методом механічних квадратур. Проведені чисельні експерименти, знайдені коефіцієнти інтенсивності напружень та магнетної індукції.

Ключові слова: п'єзомагнітна кераміка, макротріщини, сингулярні інтегральні рівняння, коефіцієнти інтенсивності полевих величин

L.A. FILSHTINSKII, D.M. NOSOV, G.A. EREMENKO, O.I. OGLOBLINA
Sumy State University, Ukraine

DETERMINATION OF CHARACTERISTICS OF THE DESTRUCTION IN PIEZOMAGNETIC PLATE WITH CRACKS

We consider the boundary value problem of piezomagnetic plane, weakened by cracks. It is supposed that the banks of the cracks are under the normal pressure and the uniformly distributed mechanical loads and magnetic induction at infinity are acting. The problem is reduced to the system of singular integral equations, which solution was obtained with using the mechanical quadratures method. Numerical experiments are provided, stress and magnetic induction intensity factors are found.

Keywords: piezomagnetic ceramics, macrocracks, singular integral equations, intensity factors of field magnitude.

Постановка проблемы

Впервые метод решения краевых задач для анизотропных тел с трещинами, опирающийся на технику сингулярных интегральных уравнений, предложен одним из авторов в 1976 г. В данной статье этот метод модифицирован, что позволило рассматривать краевые задачи механики разрушения для пьезомагнитных тел с трещинами.

Анализ последних исследований и публикаций

После создания искусственных пьезомагнитных керамик, обладающих гигантской магнитострикцией [1, 2], интерес исследователей к магнитоупругости и к тем выводам, которые можно получить с помощью этого раздела механики, существенно усилился. Задачи о трещинах в магнитоупругих и магнитоэластичных телах рассматривались, например, в статьях [4-9]. Решения многочисленных двумерных задач о концентрации магнитоупругих полей в телах с отверстиями и трещинами представлены в монографии [10]. В данной статье формализм, предложенный в [11] обобщается на плоские краевые задачи магнитоупругости для тел с трещинами.

Построение эффективного аналитико-числового алгоритма, позволяющего исследовать механические и магнитные поля в каждой точке тела, а также определять параметры разрушения магнитоупругой пластины, оценить взаимное влияние механических и магнитных полей в керамиках.

Основная часть

Пусть в некоторой области пьезомагнитной плоскости имеются трещины Γ_n .

Согласно модели магнитоупругости [3], запишем представления функции напряжений F_1 и магнитного потенциала F_2

$$F_1(x_1, x_2) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \gamma_k f_k''(z_k), \quad F_2(x_1, x_2) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \lambda_k f_k'''(z_k), \quad (1)$$

$$\gamma_k = -\chi_{22} - \chi_{11} \mu_k^2, \quad \lambda_k = g_{22} + (g_{16} + g_{21}) \mu_k^2;$$

представления полевых величин

$$\{\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}\} = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \{\mu_k^2, -\mu_k, 1\} \gamma_k \Phi_k(z_k),$$

$$\{B_1, B_2\} = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \{\mu_k, -1\} \lambda_k \Phi_k(z_k), \quad \Phi_k(z_k) = f_k^{IV}(z_k), \quad (2)$$

$$\{H_1, H_2\} = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \{1, \mu_k\} \mu_k r_k \Phi_k(z_k), \quad r_k = g_{16} \gamma_k + \chi_{11} \lambda_k.$$

Механические перемещения получаем, интегрируя совместно представления деформации:

$$\{u_1, u_2\} = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \{p_{1k}, p_{2k}\} \varphi_k(z_k), \quad \varphi_k(z_k) = \Phi_k(z_k), \quad (3)$$

$$\text{где } p_{1k} = (s_{11} \mu_k^2 + s_{12}) \gamma_k - g_{21} \lambda_k, \quad p_{2k} = \left(s_{12} \mu_k + \frac{s_{22}}{\mu_k} \right) \gamma_k - \frac{g_{22}}{\mu_k} \lambda_k.$$

Главный вектор усилий, действующих на дугу AB в теле, находим с учетом (2). Имеем

$$X_{1n} = \sigma_{11} \cos \psi + \sigma_{12} \sin \psi = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \gamma_k \mu_k a_k(\psi) \Phi_k(z_k), \quad (4)$$

$$X_{2n} = \sigma_{12} \cos \psi + \sigma_{22} \sin \psi = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \gamma_k a_k(\psi) \Phi_k(z_k), \quad a_k(\psi) = \mu_k \cos \psi - \sin \psi.$$

Согласно модели поставленная краевая задача сводится к определению потенциалов $\Phi_k(z_k)$ из краевых условий на полной границе тела $\Gamma = \bigcup_n \Gamma_n$.

$$X_{1n}^\pm \Big|_\Gamma = -p \cos \psi, \quad X_{2n}^\pm \Big|_\Gamma = -p \sin \psi, \quad B_n^\pm \Big|_\Gamma = 0. \quad (5)$$

Учитывая соотношения (4), (5), эти условия представим в виде

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 c_{mk} a_k(\psi_0) \Phi_k^\pm(\zeta_{0k}) = f_m(\zeta_0), \quad (m = \overline{1,3}), \quad \zeta_{0k} = \operatorname{Re} \zeta_0 + \mu_k \operatorname{Im} \zeta_0, \quad (6)$$

$$c_{1k} = \mu_k \gamma_k, \quad c_{2k} = -\gamma_k, \quad c_{3k} = \lambda_k, \quad f_1 = -p \cos \psi_0, \quad f_2 = -p \sin \psi_0, \quad f_3 = 0, \quad \zeta_0 \in \Gamma.$$

Здесь верхний знак соответствует левому берегу Γ_n (при движении от начала трещины к концу), ψ_0 – угол между нормалью к левому берегу в точке ζ_0 и осью Ox_1 .

Для решения краевой задачи теории функций (6) представим, исходя из [11], функции Φ_k в виде обобщенных интегралов типа Коши

$$\Phi_k(z_k) = A_k + \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \frac{\omega_k(\zeta)}{\zeta_k - z_k} ds, \quad \omega_k(\zeta) = \left\{ \omega_k^{(n)}(\zeta), \zeta \in \Gamma_n \right\}, \quad (7)$$

$$\zeta_k = \operatorname{Re} \zeta + \mu_k \operatorname{Im} \zeta, \quad z_k = \operatorname{Re} z + \mu_k \operatorname{Im} z, \quad z = x_1 + ix_2,$$

где ds – элемент дуги в физической плоскости z .

Следы функции Φ_k на Γ запишем, используя формулы Сохоцкого-Племеля [15]. Имеем

$$\left\{ \Phi_k(z_k) \right\}_{z \rightarrow \zeta_0}^\pm = A_k \pm \frac{i \omega_k(\zeta_0)}{2 a_k(\psi_0)} + \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \frac{\omega_k(\zeta)}{\zeta_k - \zeta_{0k}} ds, \quad (8)$$

где верхний знак относится к левому берегу разреза, нижний – к правому.

Таким образом, граничная задача (7) свелась к матричному сингулярному интегральному уравнению первого рода с ядром Коши относительно действительной вектор-функции $q(\zeta)$.

$$\operatorname{Re} \int_{\Gamma} K(\zeta, \zeta_0) q(\zeta) ds = \pi N(\zeta_0), \quad \zeta_0 \in \Gamma = \bigcup_n \Gamma_n, \quad K(\zeta, \zeta_0) = RG(\zeta, \zeta_0)R^{-1},$$

$$G(\zeta, \zeta_0) = \operatorname{diag} \left\{ \frac{a_1(\psi_0)}{\zeta_1 - \zeta_{01}}, \frac{a_2(\psi_0)}{\zeta_2 - \zeta_{02}}, \frac{a_3(\psi_0)}{\zeta_3 - \zeta_{03}} \right\}, \quad (9)$$

$$R = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}, \quad \det R \neq 0, \quad q(\zeta) = \{q_1(\zeta), q_2(\zeta), q_3(\zeta)\}^T,$$

$$N(\zeta_0) = \{N_1(\zeta_0), N_2(\zeta_0), N_3(\zeta_0)\}^T,$$

$$N_1 = -p \cos \psi_0 - \langle \sigma_{11} \rangle \cos \psi_0 - \langle \sigma_{12} \rangle \sin \psi_0, \quad N_2 = -p \sin \psi_0 - \langle \sigma_{12} \rangle \cos \psi_0 - \langle \sigma_{22} \rangle \sin \psi_0,$$

$$N_3 = -\langle B_1 \rangle \cos \psi_0 - \langle B_2 \rangle \sin \psi_0.$$

Уравнения (9) необходимо рассматривать совместно с дополнительными условиями однозначности перемещений и магнитного потенциала, которые сводятся к трем равенствам (на каждой трещине).

$$\int_{\Gamma_n} q(\zeta) ds = 0, \quad (n = \overline{1, M}), \quad (10)$$

где M – количество трещин.

Построенный аналитический алгоритм сводится к решению системы $3M$ сингулярных интегральных уравнений первого рода (9) совместно с $3M$ дополнительными условиями (10). Эти условия фиксируют единственное решение системы (9) в классе функций, неограниченных на концах дуг Γ_n [14].

Асимптотика решения в вершинах трещин Γ_n . Введем параметризацию контура

$$\zeta = \zeta(\beta), \quad \zeta_0 = \zeta(\beta_0), \quad \zeta(-1) = a, \quad \zeta(1) = b, \quad -1 \leq \beta, \beta_0 \leq 1. \quad (11)$$

Плотности $\omega(\zeta)$ имеют корневые особенности [13, 14]. Положим

$$\omega(\zeta) = \frac{\Omega(\beta)}{s'(\beta)\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \Omega(\beta) = \{\Omega_1(\beta), \Omega_2(\beta), \Omega_3(\beta)\}^T, \quad s'(\beta) = ds/d\beta. \quad (12)$$

В связи с этим вектор $q(\zeta) = \{q_1(\zeta), q_2(\zeta), q_3(\zeta)\}^T$ представим так

$$q(\zeta) = \frac{Q(\beta)}{s'(\beta)\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{R^{-1}\Omega(\beta)}{s'(\beta)\sqrt{1-\beta^2}}, \quad Q(\beta) = \{Q_1(\beta), Q_2(\beta), Q_3(\beta)\}^T. \quad (13)$$

Для исследования главной асимптотики функции (7) воспользуемся формулами поведения интегралов типа Коши в окрестностях концов линии интегрирования [13].

Имеем в вершине трещины c

$$\Phi_k^c(z_k) = \frac{i\Omega_k(\pm 1)}{2\sqrt{2\zeta_k'(\pm 1)}} [\pm(c_k - z_k)]^{-\frac{1}{2}}, \quad \Omega(\beta) = \{\Omega_1(\beta), \Omega_2(\beta), \Omega_3(\beta)\}^T, \quad \zeta_k' = d\zeta_k/d\beta \quad (14)$$

где верхний знак соответствует концу трещины $c = b$, нижний – началу $c = a$.

Главную асимптотику механических напряжений, магнитной напряженности и индукции получаем, подставляя в выражения (2) асимптотику (14).

КИН и магнитной индукции в вершинах трещин. Имеем на продолжении трещины по касательной за вершину

$$\sigma_k = \sigma_{11} \cos^2 \psi_c + \sigma_{12} \sin 2\psi_c + \sigma_{22} \sin^2 \psi_c,$$

$$\tau_{ns} = \sigma_{12} \cos 2\psi_c + \frac{\sigma_{22} - \sigma_{11}}{2} \sin 2\psi_c, \quad B_n = B_1 \cos \psi_c + B_2 \sin \psi_c, \quad (15)$$

$$z_k - a_k = -ra_k(\psi_a), \quad b_k - z_k = -ra_k(\psi_b),$$

где ψ_c – угол положительной нормали к левому берегу в вершине c и осью Ox_1 , r – расстояние от точки на касательной (в окрестности трещины) к соответствующей вершине.

Учитывая (14), (2) находим из (15)

$$\sigma_n = \mp \frac{1}{\sqrt{2rs'(\pm 1)}} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \gamma_k a_k(\psi_c) \Omega(\pm 1), \quad (16)$$

$$\tau_{ns} = \mp \frac{1}{\sqrt{2rs'(\pm 1)}} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \gamma_k b_k(\psi_c) \Omega(\pm 1), \quad B_n = \mp \frac{1}{\sqrt{2rs'(\pm 1)}} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \lambda_k \Omega(\pm 1).$$

Определим КИН равенствами [16, 15]

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_n, \quad K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \tau_{ns}, \quad K_B = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} B_n.$$

Согласно этим определениям, учитывая равенства (15), (16), получим окончательно

$$K_I = \mp \sqrt{\frac{\pi}{s'(\pm 1)}} \{Q_1(\pm 1) \cos \psi_c + Q_2(\pm 1) \sin \psi_c\}, \quad (17)$$

$$K_{II} = \mp \sqrt{\frac{\pi}{s'(\pm 1)}} \{Q_2(\pm 1) \cos \psi_c - Q_1(\pm 1) \sin \psi_c\}, \quad K_B = \mp \sqrt{\frac{\pi}{s'(\pm 1)}} \{Q_3(\pm 1)\}.$$

Результаты расчетов. Рассматривалась пьезомагнитная пластина из пьезокерамики *Terfenol-D*, поляризованная вдоль оси x_2 [10], содержащая параболическую трещину ($x_1 = l\beta$, $x_2 = \varepsilon\beta^2$, $l=1$, $\varepsilon = 0,5$, $-1 \leq \beta \leq 1$) и прямолинейную трещину ($x_1 = l\beta$, $x_2 = \varepsilon\beta$, $l=1$, $\varepsilon = 1$, $-1 \leq \beta \leq 1$), расположенную над ней под углом α на расстоянии между центрами трещин $h = 1$.

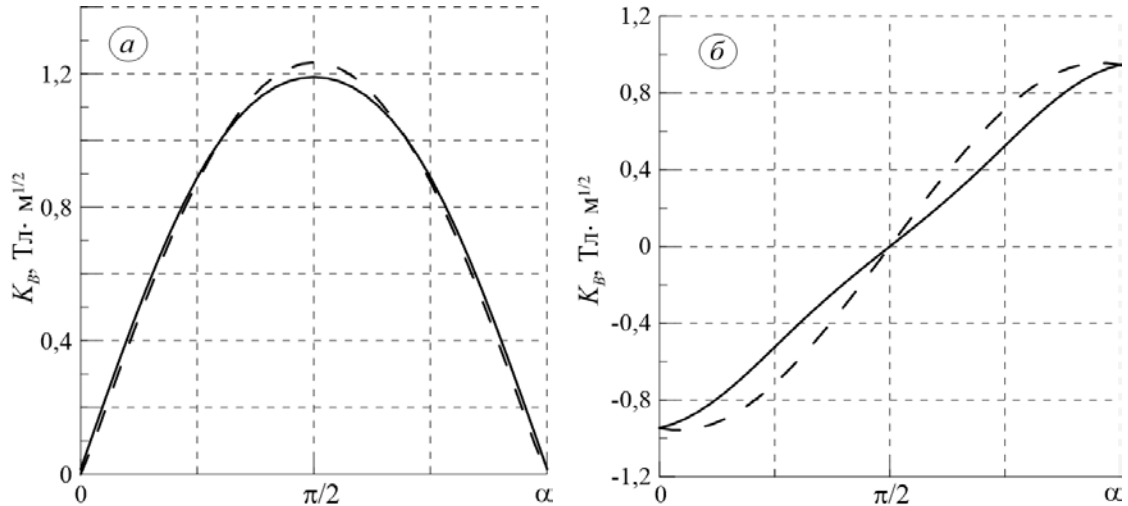


Рис.1 КИ магнитной индукции K_B для прямолинейной трещины в зависимости от угла ее поворота в однородных магнитных полях $\langle B_1 \rangle = 1 \text{ Тл}$ (а) и $\langle B_2 \rangle = 1 \text{ Тл}$ (б) соответственно. Сплошная линия соответствует вершине трещины а, пунктирная – вершине б.

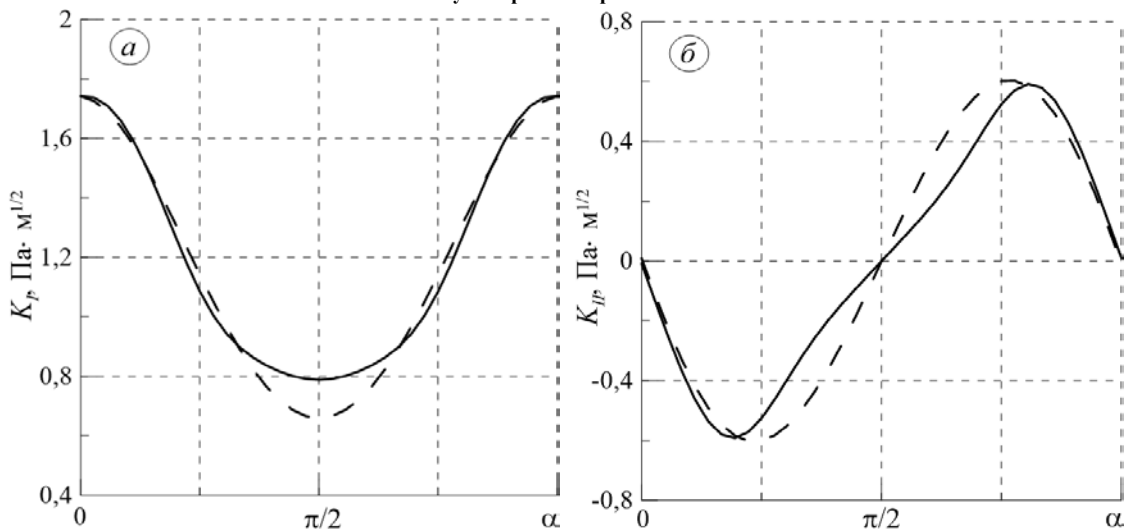


Рис. 2 КИН K_I (а) и K_{II} (б) для прямолинейной трещины в зависимости от угла ее поворота в однородном магнитном поле $\langle B_2 \rangle = 1 \text{ Тл}$. Сплошная линия соответствует вершине трещины а, пунктирная – вершине б.

Выводы

Рассматриваемая плоская задача магнитоупругости для пьезомагнитной плоскости с трещинами сведена к матричному сингулярному интегральному уравнению относительно трех вектор-функций, неограниченных на концах разрезов. С использованием численного метода механических квадратур получены численные результаты для коэффициентов интенсивности полевых величин. Исходя из результатов исследования, можно сделать вывод, что в данной среде проявляется связь магнитных и механических полей, видна зависимость взаимодействия силовых и магнитных полей. Уменьшение значений коэффициентов интенсивности в вершине прямой трещины, которая находится ближе к нижерасположенной параболической, показывает влияние взаимодействия трещин на асимптотику полей в их вершинах.

Список использованной литературы

1. Clark A.E. *Ferromagnetic Materials* / A.E. Clark. — Amsterdam: North-Holland, 1980. — Vol. 1. — P. 531-589.
2. James R.D. Theory of magnetostriction with application to Terfenol-D / R.D. James, D. Kinderlehrer // *J. Appl. Phys.* — 1994. — Vol.76. — Is.10. — P. 7012-7014.
3. Фильштинский Л.А. Фундаментальные решения краевой задачи магнитоупругости для полуплоскости / Л.А. Фильштинский // *Вісник Донецького національного університету. Сер. А: Природничі науки.* — 2014. — № 2. — С. 60-64.
4. Lin C.-B. The magnetoelastic problem of a crack in a soft ferromagnetic solid / C.-B. Lin, C.-S. Yeh // *Int. J. Sol. and stuct* — 2002. — Vol. 39. — P. 1-17.
5. Tian W.-Y. Multiple crack interaction problem in magnetoelastic solids / W.-Y. Tian, U. Gabbert // *Europ. J. Mechanics. Part A.* — 2004. — Vol.23. — P.1-17.
6. Qin F. Perturbed magnetic field of an infinite plate with a centered crack / F. Qin, Y. Zhang, Y.-N. Liu // *Acta Mech. Sin.* — 2011. — Vol. 27. — Is. 2. — P. 259-265.
7. Chen W.Q. General solution for transversely isotropic magneto-electro-thermo-elasticity and the potential theory method / W.Q. Chen, K.Y. Lee, H. Ding // *Int. J. Eng. Sci.* — 2004. — Vol. 42. — P. 1361-1379.
8. Gao C.F. Crack problems in magneto-electro-elastic solids. Part I: exact solution of a crack / C.F. Gao, H. Kessler, H. Balke // *Int. J. Eng. Sci.* — 2003. — Vol. 41. — P. 969-981.
9. Yu H.J. Investigation of mixed-mode stress intensity factors for nonhomogeneous materials using an interaction integral method / H.J. Yu, L.Z. Wu, L.C. Guo, S.Y. Du, Q.L. He // *Int. J. Solids Struct.* — 2009. — Vol. 46. — P. 3710-3724.
10. Калоеров С.А. Двумерные задачи электро и магнитоупругости для многосвязных областей / С.А. Калоеров, А.Н. Баева, О.Н. Бороненко. — Донецк: Юго-Восток, 2007. — 269 с.
11. Фильштинский Л. А. Упругое равновесие плоской анизотропной среды, ослабленной произвольными криволинейными трещинами. Предельный переход к изотропной среде/ Фильштинский Л. А. // *Известия АН СССР. Механика твердого тела.* — 1976. — № 5. — С. 91-97.
12. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела / С.Г. Лехницкий. — М.: Наука, 1977. — 416 с.
13. Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения / Н.И. Мухелишвили. — М.: Физматгиз, 1962. — 599 с.
14. Векуа Н.П. Системы сингулярных интегральных уравнений / Н.П. Векуа. — М.: Наука, 1970. — 379с.
15. Панасюк В.В. Механика квазихрупкого разрушения материалов / В.В. Панасюк. — К.: Наук. думка, 1991. — 416 с.
16. Саврук М.П. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами / М.П. Саврук. — К.: Наукова думка, 1988. — 620 с.