УДК 519.3

А.Н. ХОМЧЕНКО
Черноморский государственный университет им. Петра Могилы
Е.И. ЛИТВИНЕНКО, И.А. АСТИОНЕНКО
Херсонский национальный технический университет

БАРИЦЕНТРИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ МЁБИУСА И НЕЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИИ-"КРЫШКИ"

Посвящается 225-летию со дня
рождения А.Ф. Мёбиуса

В статье рассматриваются возможные обобщения барицентрической задачи Мёбиуса на неоднородный стержень (одномерный симплекс). Как известно, классические результаты Мёбиуса связаны с однородным стержнем, когда априори работает архимедово правило рычага. Барицентрические координаты Мёбиуса ассоциируются с линейной функцией-"крышкой", которая часто применяется в методе конечных элементов в связи с кусочно-линейной интерполяцией функций. Модель неоднородного стержня можно построить с помощью нелинейных "полукрышек", образующих симметричную пару. Так поступают в задаче интерполяции сплайнами. Рассмотрены два характерных случая неравномерного распределения массы, когда плотность в средней точке стержня достигает минимума или максимума. Приведены примеры вычисления узловых нагрузок для стержня единичной массы со смещенным барицентром. Установлен вероятностный смысл построенных моделей.

Ключевые слова: барицентрические координаты, метод конечных элементов, кусочно-линейная интерполяция, узловые нагрузки, неоднородный стержень.

А.Н. ХОМЧЕНКО
Чорноморський державний університет ім. Петра Могили
О.І. ЛИТВИНЕНКО, І.О. АСТІОНЕНКО
Херсонський національний технічний університет

БАРИЦЕНТРИЧНІ КООРДИНАТИ МЕБІУСА ТА НЕЛІНІЙНІ ФУНКЦІЇ-"КРИШКИ"

У статті розглядаються можливі узагальнення барицентричної задачі Мебіуса на неоднорідний стрижень (одномірний симплекс). Як відомо, класичні результати Мебіуса пов’язані з однорідним стрижнем, коли апріорі працює архімедове правило важеля. Барицентричні координати Мебіуса асоціюються з лінійною функцією-"кришкою", яка часто застосовується в методі скінченних елементів у зв’язку з кусочно-лінійною інтерполяцією функцій. Модель неоднорідного стрижня можливо побудувати за допомогою нелінійних "напівкришок", які утворюють симетричну пару. Так поводяться у задачі інтерполяції сплайнами. Розглянуті два характерних випадки нерівномірного розподілу маси, коли щільність у середній точці стрижня досягає мінімума або максимума. Наведено приклади обчислення вузлових навантажень для стрижня одиничної маси зі зміщеним барицентром. Установлений ймовірнісний зміст побудованих моделей.

Ключові слова: барицентричні координати, метод скінченних елементів, кусочно-лінійна інтерполяція, вузлові навантаження, неоднорідний стрижень.

A.N. KHOMCHENKO
Petro Mohyla Black Sea State University
YE.I. LITVINENKO, I.A. ASTIONENKO
Kherson National Technical University

MÖBIUS' BARYCENTRIC COORDINATES AND NON-LINEAR FUNCTIONS-"CAPS"

The probable generalizations of Möbius barycentric problem onto the inhomogeneous core (one-dimensional simplex) are shown in the article. As is known, Möbius’ classical results are connected with homogeneous core, when Archimedes' Law of the Lever a priori works. Möbius' barycentric coordinates are associated with lihear function-"cap", which is often used in the finite elements method in connection with piecewise linear interpolation of functions. The model of inhomogeneous core can be built with the help of non-linear "half-caps", which form symmetric pair. This way is used in the problem of spline interpolation. Two characteristic cases of nonuniform mass distribution when density in the middle point of core reaches minimum or maximum are investigated. The examples of calculation of nodal loads for core of unit mass with shifted barycenter are shown. Probability meaning of built models is ascertained.

Keywords: barycentric coordinates, finite elements method, piecewise linear interpolation, nodal loads, inhomogeneous core.

Постановка проблемы

Решая барицентрическую задачу (о принудительном смещении барицентра симплекса), Мёбиус априори предполагал, что плотность симплекса постоянна. Так были открыты (1827 г.) удобные и полезные барицентрические координаты (Б-координаты), которые находят всё больше применений в геометрии, вычислительной математике и теории вероятностей. Представляет интерес исследование возможных обобщений на неоднородные симплексы классической задачи Мёбиуса с целью установить, какие свойства Б-координат наследуют новые решения.

Анализ предшествующих публикаций

Термин "крышка", вероятно, появился во второй половине XX столетия в работах инженерно ориентированных энтузиастов, развивающих метод конечных элементов (МКЭ, [1, 2]). В период становления и развития МКЭ появилось немало специфических терминов: ячейка Куранта, пирамида Куранта, клетка Кунса, функция-"пагода", симплекс, мультиплекс, серендипов элемент, "кирпич" Вильсона и т.п. На самом деле о линейной функции-"крышке" знал ещё Архимед, который в III в. до н.э. сформулировал "золотое правило" механики [3]. Так рычаг Архимеда стал прообразом одномерного симплекса, а линейные зависимости правила Архимеда – прообразом "полукрышек". Линейные функции-"крышки" были известны Ньютону, который в 1687 г. использовал разделенные разности для построения интерполяционной формулы. Позже Мёбиус распространил барицентрические идеи на двумерный и трехмерный симплексы.

В данной работе на примере одномерного симплекса исследованы нелинейные "крышки" в двух типичных случаях: когда плотность в средней точке симплекса максимальна и когда плотность в указанной точке минимальна. Нетрудно предположить, что сохранение весового баланса и соблюдение симметрии не гарантируют однозначность решения задачи Мёбиуса о смещении барицентра. Каждая модель по своему реагирует на появление эксцентриситета. Ниже предпринята попытка с помощью симметричных пар кривых ввести на неоднородном симплексе локальные координаты, обладающие характерными свойствами барицентрических координат Мёбиуса.

Основная часть

Не уменьшая общности, рассмотрим симплекс единичной длины [0; 1]. Как известно, Б-координаты одномерного симплекса имеют вид:

$$L_0(x) = 1 - x; \quad L_1(x) = x. \tag{1}$$

Эта симметричная пара (рис. 1) обладает следующими характерными свойствами:

$$0 \le L_i(x) \le 1; \quad \sum_{i=0}^{1} L_i(x) = 1; \quad L_i(x_k) = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \ne k, \end{cases} \tag{2}$$

где i – номер функции, k – номер узла.

Следующий шаг состоит в подборе нелинейных симметричных пар, обладающих свойствами (2). Из множества подходящих пар мы выбрали две модели (рис. 1).

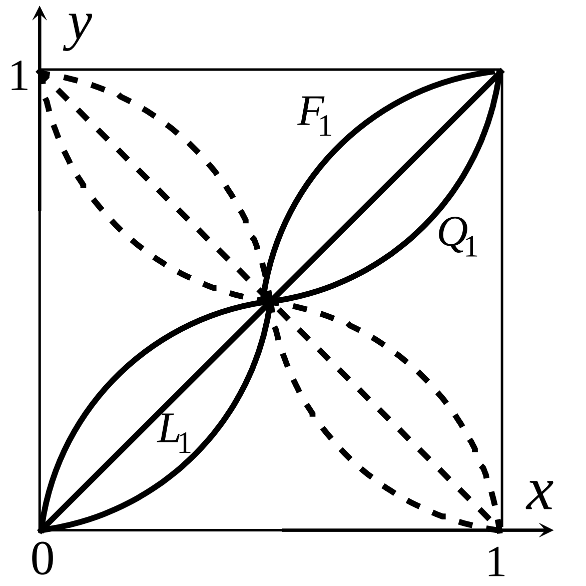

Рис. 1. Три модели симметричных пар

Модель F :

$$F_0(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1; \quad F_1(x) = -2x^3 + 3x^2 . \tag{3}$$

Модель Q :

$$Q_0(x) = \frac{\cos\frac{\pi x}{2}}{\sin\frac{\pi x}{2} + \cos\frac{\pi x}{2}}; \quad Q_1(x) = \frac{\sin\frac{\pi x}{2}}{\sin\frac{\pi x}{2} + \cos\frac{\pi x}{2}} . \tag{4}$$

Примечание. В теории интерполяции функция-"крышка" составляется из двух "полукрышек" путем соединения пары в наивысшей точке. В задаче Мёбиуса удобнее соединить "полукрышки" в средней точке (в центре симметрии). Понятно, что во всех случаях барицентр симплекса совпадает с геометрическим центром симплекса. Поэтому все модели L, F и Q дают одинаковое поузловое распределение единичной массы симплекса: $\gamma_0 = \gamma_1 = 0{,}5$. Теперь сместим центр тяжести симплекса в точку $x = 0{,}25$, вычислим нагрузки в узлах 0 и 1. Результаты таковы:

для модели L : $\gamma_0 = 0{,}75, \quad \gamma_1 = 0{,}25;$

для модели F : $\gamma_0 = 0{,}84, \quad \gamma_1 = 0{,}16;$

для модели Q : $\gamma_0 = 0{,}71, \quad \gamma_1 = 0{,}29.$

Заметим, что при одинаковой средней плотности 1, плотность неравномерного распределения модели F достигает максимума 1,5 в центре отрезка, а плотность распределения модели Q в той же точке достигает минимального значения 0,785.

В формулах (2) легко усмотреть четкий вероятностный смысл Б-координат Мёбиуса. Так, функция $L_1(x)$ определяет вероятность случайного попадания точки в $[0;\, x]$. Тогда $L_0(x)$ определяет вероятность попадания случайной точки в $[x; 1]$. В рамках нелинейного закона распределения вероятностей функция $Y_0(x)$ ассоциируется с вероятностью попадания случайной точки в $[x; 1]$, $Y_1(x)$ – с вероятностью попадания случайной точки в $[0;\, x]$. Точнее, $Y_0(x)$ определяет вероятность попадания случайной ординаты в интервал $[Y_0(x); 1]$, а $Y_1(x)$ – это вероятность попадания случайной ординаты в $[0;\, Y_1(x)]$.

Анализ показывает, что нелинейные "полукрышки" наследуют многие замечательные свойства Б-координат. Кроме отмеченного выше, укажем на то, что любая кривая из симметричной пары разделяет единичный квадрат (рис. 1) на две равновеликие фигуры. Интересно, что площадь прямоугольного треугольника с искривленной гипотенузой можно вычислить точно, пользуясь любой из приближенных формул интегрирования, например, центральных прямоугольников (1 узел), трапеций (2 узла), Симпсона (3 узла), "трех восьмых" (4 узла).

Приведём ещё две симметричные пары нелинейных "полукрышек":
модель H (с ослабленным центром):

$$H_0(x) = \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x} + \sqrt{1-x}}, \quad H_1(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{1-x}}; \tag{5}$$

модель G (с усиленным центром):

$$G_0(x) = -6x^5 + 15x^4 - 10x^3 + 1; \qquad G_1(x) = 6x^5 - 15x^4 + 10x^3 . \tag{6}$$

Заинтересованный читатель уже понял, что множество симметричных пар не ограничивается приведенными здесь примерами. Среди семи протестированных нами моделей наиболее плотной в центре оказалась модель G , а узловые нагрузки моделей (5) и (6) таковы:

для модели H : $\gamma_0 = 0{,}64, \quad \gamma_1 = 0{,}36;$

для модели G : $\gamma_0 = 0{,}9, \quad \gamma_1 = 0{,}1.$

На первый взгляд может показаться, что в барицентрической задаче Мёбиуса возникает парадокс (типа парадокса Бертрана). На самом деле, в каждом конкретном случае "работает" свой закон распределения массы, позволяющий уравновесить неоднородный рычаг при смещении точки опоры.

Выводы

В классической задаче Мёбиуса плотность постоянна, поэтому Б-координаты учитывают только геометрию. Симметричные пары нелинейных функций учитывают не только геометрию, но и физику. Представляет интерес использование нелинейных "полукрышек" в барицентрической задаче Мёбиуса для неоднородной квадратной пластины.

Список использованной литературы

1. Стренг Г. Теория метода конечных элементов / Г. Стренг, Дж. Фикс. — М. : Мир, 1977. — 350 с.
2. Марчук Г. И. Введение в проекционно-сеточные методы / Г. И. Марчук, В. И. Агошков. — М. : Наука, 1981. — 416 с.
3. Балк М. Б. Геометрия масс / М. Б. Балк, В. Г .Болтянский. — М. : Наука, 1987. — 160 с.