УДК 693.546.4.001.24

Ю.В. ЧОВНЮК
Национальный университет биоресурсов и природопользования Украины
В.Т. КРАВЧУК
Киевский национальный университет строительства и архитектуры

ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В АНАЛИЗЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВИБРОУПЛОТНИТЕЛЕЙ, РАБОТАЮЩИХ В РЕЖИМЕ ПУСКА

Предложена дискретно-континуальная модель для анализа кинематических параметров нестационарных колебаний поверхностных виброуплотнителей бетонных смесей, которые работают в режиме пуска.

Ключевые слова: дискретно-континуальное моделирование, анализ, нестационарные колебания, поверхностный виброуплотнитель, режим, пуск, бетонная смесь.

Ю.В. ЧОВНЮК
Національний університет біоресурсів і природокористування України
В.Т. КРАВЧУК
Київський національний університет будівництва і архітектури

ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ У АНАЛІЗІ НЕСТАЦІОНАРНИХ КОЛИВАНЬ ПОВЕРХНЕВИХ ВІБРОУЩІЛЬНЮВАЧІВ, ПРАЦЮЮЧИХ У РЕЖИМІ ПУСКУ

Запропонована дискретно-континуальна модель для аналізу кінематичних параметрів нестаціонарних коливань поверхневих віброущільнювачів бетонних сумішей, котрі працюють у режимі пуску.

Ключові слова: дискретно-континуальне моделювання, аналіз, нестаціонарні коливання, поверхневий віброущільнювач, режим, пуск, бетонна суміш.

Y.V. CHOVNYUK
National University of Bioresources and Life Sciences of Ukraine
V.T. KRAVCHYUK
Kyiv National University of Construction and Architecture

DISCRETE AND CONTINUAL MODELING IN ANALYSIS OF NONSTATIONARY OSCILLATIONS OF SURFACE VIBRODEVICES FOR DENSITY'S INCREASING WORKING IN A START-UP REGIME

The discrete and continual model for the analysis of kinematics parameters of nonstatinary oscillations of surface vibrodevices for concrete's mixtures density increasing working in a start-up regime is proposed.

Keywords: discrete and continual modeling, analysis, nonstationary oscillations, surface vibrodevice for density's increasing, regime, start-up, concrete's mixture.

Постановка проблемы

Вибрационная техника для поверхностного уплотнения бетонных смесей широко используется в настоящее время в строительной индустрии. Работает она, как правило, в гармоническом зарезонансном режиме. К сожалению, она не отвечает современным требованиям, и потому возникает проблема поиска новых подходов к моделированию, исследованию и разработке конструкций таких машин нового поколения. Одним из путей повышения эффективности и уменьшения энергоёмкости, металлоёмкости поверхностных виброуплотнителей бетонных смесей является применение системного подхода на основе рассмотрения совместного движения системы “машина – обрабатываемая среда” с целенаправленным использованием внутренних свойств подсистем. В особенности, это важно при моделировании в таких машинах нестационарных/переходных процессов, сопровождающихся возникновением значительных по амплитуде колебаний, приводящих к перегрузкам машины (режимы пуска, остановки, балансировка и пр.), потере её надёжности и долговечности функционирования.

Вибрационные технологические машины для поверхностного уплотнения бетонных смесей отличаются большим разнообразием конструкций, обусловленных их технологическим назначением, особенностями взаимодействия исполнительных органов с технологической нагрузкой, видом и физико-механическими свойствами самой технологической нагрузки.

Особенностью подхода к учёту технологической нагрузки в основном и определяется принадлежность таких машин к классу тяжёлых. Критерием оценки класса машины в данном случае должна служить величина ошибки, получаемой при использовании различных приёмов как при учёте самой технологической нагрузки, так и при использовании методов исследования динамики подобных машин с учётом этой нагрузки.

Полная схема вибрационной технологической машины тяжёлого типа для поверхностного уплотнения бетонных смесей состоит из элементов, содержащих дискретные параметры (например, пружины, стоящие на обоих концах виббробруса/вибробалки), и элементов с бесконечным числом степеней свободы движения (системы с распределёнными параметрами) – это, в данном случае, сама вибробалка и бетонная смесь (в особенности, если её толщина значительна $\geq 0{,}5$м). Именно такие элементы являются эквивалентом технологической нагрузки. Исходя из особенностей работы вибрационных технологических машин тяжёлого типа для поверхностного уплотнения бетонных смесей и в зависимости от требуемых конечных результатов расчёта общая задача динамики может быть разбита на три самостоятельные. Это: 1) исследование технологической нагрузки как системы с распределёнными параметрами и приведение её параметров к дискретным; 2) исследование динамики машины с учётом приведенных параметров технологической нагрузки; 3) исследование динамики технологической нагрузки как системы с распределёнными параметрами с использованием в качестве граничных условий параметров движения исполнительного органа, найденных из решения предыдущей задачи. При этом необходимо решать две самостоятельные задачи: а) разработка теории и методов расчёта динамики технологической нагрузки как системы с распределёнными параметрами; б) разработка теории и методов расчёта машин как линейных/нелинейных систем с дискретными параметрами.

Анализ последних исследований и публикаций

Впервые спектр свободных колебаний конструкций поверхностных виброуплотнителей бетонных смесей исследован в [1]. Авторы [2] провели динамический анализ работы поверхностных виброуплотнителей в установившемся режиме работы (после завершения переходных процессов и выхода системы “вибробалка – бетонная смесь” на стационарный режим совместных колебаний). Теория вибромашин для уплотнения строительных смесей на основе синтеза дискретно-континуальных систем предложена в работах [3-7], однако развитый здесь подход некорректен, поскольку авторы используют метод разделения переменных (метод Фурье) для решения волнового уравнения при подвижных граничных условиях (что недопустимо!). Наиболее обоснованный подход к решению задач такого класса, по мнению авторов данного исследования, изложен в [8-10]. Именно его мы и будем придерживаться в дальнейшем изложении.

Формулирование цели исследования

Цель работы состоит в установлении основных кинематических параметров движения рабочего органа поверхностного виброуплотнителя бетонных смесей (виброруса/вибробалки) с учётом дискретных и континуальных свойств как самого рабочего органа, так и уплотняемой под ним бетонной смеси, функционирующего в переходном режиме (режиме пуска, когда амплитуда и частота внешнего воздействия изменяются с течением времени). Для достижения указанной цели исследования используются методы и подходы, развитые в [8-11]. Предполагается, что система “вибробалка – бетонная смесь” представляет собой единое целое (сплошной контакт по поверхности стыка) и осуществляется безотрывное движение самой смеси, контактирующей с рабочим органом поверхностного виброуплотнителя.

Изложение основного материала исследования

В настоящей работе приведено решение задачи об определении частот собственных колебаний конструкций рабочих органов поверхностных виброуплотнителей для бетонных смесей, а также их основных кинематических параметров (поперечного прогиба вибробалки, среднего по длине вибробалки прогиба, возможные пространственные формы колебаний виброруса). При этом указанные параметры определяются на этапе пуска поверхностного виброуплотнителя, когда он функционирует в режиме нестационарных колебаний, а амплитуда и частота вынуждающей силы зависят определённым образом от времени (t). Актуальность постановки такой задачи объясняется тем, что существующие методики расчёта не содержат рекомендаций по выбору конструкции продольных и поперечных сечений, а позволяют рассчитать лишь общую колеблющуюся массу. Обладая пониженной металло- и энергоёмкостью и простотой, поверхностные вибромашины для уплотнения бетонных смесей работают с повышенной продолжительностью включения. Это обстоятельство предъявляет высокие требования к их эксплуатационной надёжности, связанной непосредственно с установлением характера динамического поведения конструкции в нестационарных режимах её эксплуатации. Модель бетонной смеси как динамической системы рассматривается на начальном этапе её уплотнения (когда уже проявляются вязкоупругие свойства смеси) при безотрывных колебаниях совместно с вибробрусом.

При моделировании вибрационного бруса балкой, лежащей на основании Винклера, её вынужденные колебания описываются уравнением:

$$\rho S\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+EJ\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+\mu EJ\frac{\partial^5 y}{\partial x^4\partial t}+h\frac{\partial y}{\partial t}+k_0 y-r^2\frac{\partial^4 y}{\partial x^2\partial t^2}=f(x,t), \qquad (1)$$

где: y – поперечный прогиб балки, зависящий от продольной координаты вдоль её неизогнутой оси x и времени t; ρ – плотность материала балки; S – площадь её поперечного сечения; EJ – её изгибная жёсткость; μ, h – коэффициенты, характеризующие соответственно вязкие свойства материала балки и основания; k_0 – коэффициент жёсткости основания; r – радиус инерции поперечного сечения балки; $f(x,t)$ – интенсивность распределённой нагрузки, отнесенная к единице длины балки.

Граничные условия для упругого закрепления концов балки представим следующим образом:

$$\left.\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right|_{x=0}=0;\quad \left.\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right|_{x=l}=0;\quad \frac{EJ}{c_0}\left.\left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right)\right|_{x=0}=-y;\quad \frac{EJ}{c_0}\left.\left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right)\right|_{x=l}=+y, \qquad (2)$$

где: l – длина балки; c_0 – жёсткость амортизаторов.

Считая начальные условия нулевыми, решение (1) с учётом (2), обусловленное вынуждающей силой можно представить в виде:

$$y(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}S_n(t)\cdot Y_n(x), \qquad (3)$$

где: $Y_n(x)$ – функция, описывающая пространственную n-ую форму колебаний балки, а $S_n(t)$ – учитывает её временную зависимость.

В качестве $Y_n(x)$ выберем следующее выражение:

$$Y_n(x)=C_{1n}\cdot\overline{S_n}(x)+C_{2n}\cdot\overline{T_n}(x)+C_{3n}\cdot\overline{U_n}(x)+C_{4n}\cdot\overline{V_n}(x), \qquad (4)$$

где: $\overline{S_n}(x),\overline{T_n}(x),\overline{U_n}(x),\overline{V_n}(x)$ – функции Крылова:

$$\begin{cases}\overline{S_n}(x)=(ch\kappa_n x+\cos\kappa_n x)/2;\ \ \overline{T_n}(x)=(sh\kappa_n x+\sin\kappa_n x)/2;\\ \overline{U_n}(x)=(ch\kappa_n x-\cos\kappa_n x)/2;\ \ \overline{V_n}(x)=(sh\kappa_n x-\sin\kappa_n x)/2.\end{cases} \qquad (5)$$

Подставляя (4), (5) в (2) и приравнивая нулю определитель полученной системы однородных уравнений относительно $C_{1n}, C_{2n}, C_{3n}, C_{4n}$, найдём трансцендентное уравнение для определения коэффициентов κ_n в (5). Оно имеет следующий вид:

$$\frac{1}{2}A_n^2\cdot(-1+ch\kappa_n l\cdot\cos\kappa_n l)+A_n\cdot(-sh\kappa_n l\cdot\cos\kappa_n l+ch\kappa_n l\cdot\sin\kappa_n l)-sh\kappa_n l\cdot\sin\kappa_n l=0,\quad A_n=\frac{EJ\kappa_n^3}{c_0}. \qquad (6)$$

Рассматривая изменение κ_n в зависимости от величины безразмерного параметра $\frac{EJ}{c_0 l^3}$, можно установить, что: а) при $\frac{EJ}{c_0 l^3}\to 0$, $\kappa_n=\frac{n\pi}{l}$, $n=1,2,3,....$ (шарнирное закрепление концов вибробалки); б) при $\frac{EJ}{c_0 l^3}>>1$, $\kappa_n\cong\frac{\pi\cdot(2n-0,5)}{l}$ (жёсткое закрепление вибробалки).

В реальной ситуации $\frac{EJ}{c_0 l^3}\cong 1$, и дальнейший анализ проведен именно в этом предположении.

Используя (2), можно выразить все константы C_{in}, $i=\overline{(1,4)}$ в (4), через какую-то одну неопределённую константу, например, C_{4n}. Тогда $Y_n(x)$ приобретает вид:

$$Y_n(x)=C_{4n}\cdot\left[-\frac{\kappa_n^3 EJ}{c_0}\cdot\overline{S_n}(x)+\overline{V_n}(x)+\left(-T_n+U_n\cdot\kappa_n^3\cdot\frac{EJ}{c_0}\right)\cdot\overline{T_n}(x)/V_n\right], \qquad (7)$$

где: $T_n=\left.\overline{T_n}(x)\right|_{x=l}$; $U_n=\left.\overline{U_n}(x)\right|_{x=l}$; $V_n=\left.\overline{V_n}(x)\right|_{x=l}$. (В дальнейшем, для упрощения расчётов, константу C_{4n} полагаем равной единице). Если необходимо определить “вес” каждой n-ой пространственной моды колебаний вибробалки в общем законе, описывающем пространственный характер возникающих колебаний, тогда C_{4n} можно найти из условий ортогональной нормировки функций $Y_n(x)$:

$$\int_0^l Y_n(x)\cdot Y_m(x)dx=\delta_{nm},\quad (n,m)=1,2,3,....., \tag{8}$$

где: δ_{nm} – символ Кронекера.

Считаем, что возмущающие силы, действующие на виброрус (вибробалку), создаются вращением неуравновешенных масс, распределены на небольшом участке Δ балки длиной l ($\Delta/l<<1$) с центром в точке x_j (положение центра каждого j-го вибратора, $j=\overline{(1,N)}$, где N – общее число установленных на вибробалке вибраторов) и заданы следующим образом:

$$f(x,t)=\begin{cases}0,\quad x\notin\left[x_j-\dfrac{\Delta}{2},\quad x_j+\dfrac{\Delta}{2}\right];\\ \dfrac{q\varepsilon^2t^2}{\Delta}\cdot\cos\left(\dfrac{\varepsilon t^2}{2}+\delta\right),\quad x\in\left[x_j-\dfrac{\Delta}{2},\quad x_j+\dfrac{\Delta}{2}\right],\end{cases} \tag{9}$$

где: ε – скорость изменения частоты колебаний $\nu(t)$ возмущающей силы ($\nu(t)=\varepsilon\cdot t$); δ – начальная фаза колебаний j-го вибратора; q – коэффициент пропорциональности. Предполагаем, что все N вибраторов, размещённых на виброрусе, работают синхронно.

Введём обозначения:

$$\begin{cases}\displaystyle\int_0^l\left[\rho S\cdot Y_n(x)-r^2\cdot Y_n''(x)\right]\cdot Y_n(x)dx=\alpha_{1n};\quad \int_0^l\left[\mu EJ\cdot Y_n^{(IV)}(x)+h\cdot Y_n(x)\right]\cdot Y_n(x)dx=\alpha_{2n};\\ \displaystyle\int_0^l\left[EJ\cdot Y_n^{(IV)}(x)+k_0\cdot Y_n(x)\right]\cdot Y_n(x)dx=\alpha_{3n};\quad \left\{\sum_{j=1}^N\int_{x_j-\frac{\Delta}{2}}^{x_j+\frac{\Delta}{2}}Y_n(x)dx\right\}=\beta_n.\end{cases} \tag{10}$$

Тогда, в соответствии с ортогональностью функций $Y_n(x)$, для определения $S_n(t)$ получаем следующее уравнение:

$$\ddot{S}_n+\frac{\alpha_{2n}}{\alpha_{1n}}\cdot\dot{S}_n+\frac{\alpha_{3n}}{\alpha_{1n}}\cdot S_n=\frac{\beta_n}{\alpha_{1n}}\cdot\frac{q\varepsilon t^2}{\Delta}\cdot\cos\left(\frac{\varepsilon t^2}{2}+\delta\right). \tag{11}$$

Используя подход [11], можно получить:

$$S_n(t)=\left|\tilde{A}_n(t)\right|\cdot\cos\left\{\frac{\varepsilon t^2}{2}+\delta+\delta_{1n}(t)\right\},\quad \delta_{1n}(t)=-\mathrm{arctg}\left\{\frac{\operatorname{Im}\tilde{A}_n(t)}{\operatorname{Re}\tilde{A}_n(t)}\right\}. \tag{12}$$

Здесь, в (12), величина $\tilde{A}_n(t)$ определяется из соотношения:

$$\tilde{A}_n(t)=(i-1)\cdot\frac{\beta_n\cdot q\cdot\sqrt{\pi\varepsilon}}{4\cdot\alpha_{1n}\cdot\Delta\cdot k_n}\cdot\begin{Bmatrix}(2u_{0n}{}^2-1)\cdot\left[W(u_n)-W(u_{0n})\cdot\exp\left(u_{0n}{}^2-u_n{}^2\right)\right]+\dfrac{2i\cdot u_{0n}}{\sqrt{\pi}}\cdot\exp\left(u_{0n}{}^2-u_n{}^2\right)+\\ +\left(2v_{0n}{}^2-1\right)\cdot\left[W(v_n)-W(v_{0n})\cdot\exp(v_{0n}{}^2-v_n{}^2)\right]+\dfrac{2i\cdot v_{0n}}{\sqrt{\pi}}\cdot\exp\left(v_{0n}{}^2-v_n{}^2\right)+\\ +2\cdot\dfrac{(1+i)}{\sqrt{\pi\cdot\varepsilon}}\cdot k_n\end{Bmatrix}, \tag{13}$$

где: $i^2=-1,\quad k_n=\sqrt{\left(\dfrac{\alpha_{3n}}{\alpha_{1n}}\right)^2-\dfrac{1}{4}\cdot\left(\dfrac{\alpha_{2n}}{\alpha_{1n}}\right)^2};\quad u_n=\dfrac{(1-i)}{2\sqrt{\varepsilon}}\cdot\left(\varepsilon t-k_n+i\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\alpha_{2n}}{\alpha_{1n}}\right);$

$v_n=\dfrac{(i-1)}{2\sqrt{\varepsilon}}\cdot\left(\varepsilon t+k_n+i\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\alpha_{2n}}{\alpha_{1n}}\right);\quad u_{0n}=u_n\big|_{t=0};\quad v_{0n}=v_n\big|_{t=0}.$

В (13) $W(z)$ – интеграл вероятностей от комплексного аргумента z [12]:

$$W(z) = \exp(-z^2) \cdot \left[1 + \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^z \exp(\tilde{z}^2) d\tilde{z}\right]. \tag{14}$$

Среднее по длине вибробалки значение $y(x,t)$ в процессе пуска поверхностного виброуплотнителя бетонной смеси определяется по формуле:

$$\overline{\{y(x,t)\}_l} = \frac{1}{l} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} S_n(t) \cdot \int_0^l Y_n(x) dx \equiv \overline{y(t)}. \tag{15}$$

В решении (12) не учитываются собственные колебания вибробруса, которые быстро затухают. Если не пренебрегать этим видом колебаний, тогда $\tilde{S}_n(t)$ состоит из двух составляющих:

$$\tilde{S}_n(t) = S_n(t) + B_n \cdot \sin \lambda_n t \cdot \exp\left\{-\frac{\alpha_{2n}}{2\alpha_{1n}} \cdot t\right\}, \tag{16}$$

где: $\lambda_n = \sqrt{\frac{\alpha_{3n}}{\alpha_{1n}} - \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{\alpha_{2n}}{\alpha_{1n}}\right)^2}$, причём $\frac{\alpha_{3n}}{\alpha_{1n}} > \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{\alpha_{2n}}{\alpha_{1n}}\right)^2$, а B_n определяется из соотношения:

$$B_n \cdot \lambda_n = -\dot{S}_n(t)\Big|_{t=0}. \tag{17}$$

При условии $t_n >> \frac{2\alpha_{1n}}{\alpha_{2n}}$, где t_n – длительность переходного процесса (т.е. длительность процесса пуска поверхностного виброуплотнителя до момента установления стационарных колебаний вибробруса) вторым членом в (16) можно пренебречь и решение для (11) имеет вид (12).

Колебания вибробруса приводят к формованию под ним, в контактной зоне с бетонной смесью, вязкоупругого основания. В качестве последнего принята предложенная Х.А. Рахматулиным [13] модель вязкоупругого подслоя толщиной H, в которой считаются существенными только вертикальные смещения $u_l(\tilde{x},t)$ вдоль оси $O\tilde{x}$, перпендикулярной поверхности прямого (неизогнутого) вибробруса.

Используя гипотезу Е.С. Сорокина для учёта вязкоупругих свойств бетонной смеси, результаты работы [2] и применяя метод медленно меняющихся амплитуд [8, 11], можно для $u_l(\tilde{x},t)$ получить следующую формулу:

$$u_l(\tilde{x},t) = \overline{y(t)} \cdot \{\cos(k_l \tilde{x}) - \operatorname{ctg}(k_l H) \cdot \sin(k_l \tilde{x})\}, \tag{18}$$

где k_l определяется из соотношений:

$$k_l = \alpha - i \cdot \beta; \quad i^2 = -1; \quad \alpha = \frac{\varepsilon t}{c_l} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{1+\gamma^2}+1}{2 \cdot (1+\gamma^2)}}; \quad \beta = \frac{\varepsilon t}{c_l} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{1+\gamma^2}-1}{2 \cdot (1+\gamma^2)}}; \quad c_l = \sqrt{\frac{E_б}{\rho_б}}. \tag{19}$$

Здесь, в (19), $E_б$ – модуль упругости (модуль Юнга) бетонной смеси, $\rho_б$ – её плотность, c_l – скорость распространения продольных волн в бетонной смеси, (α, β) – волновые коэффициенты, k_l – волновой вектор в бетонной смеси, $\gamma = \frac{\gamma^*}{\left[1 - (\gamma^*)^2 / 4\right]}$, γ^* – коэффициент Е.С. Сорокина. Деформации (ε) и напряжения (σ) в бетонной смеси описываются следующими зависимостями:

$$\varepsilon = \operatorname{Re}\left\{\frac{\partial u_l(\tilde{x},t)}{\partial \tilde{x}}\right\}; \quad \sigma = \operatorname{Re}\left\{E_б \cdot (1 + i \cdot \gamma) \cdot \frac{\partial u_l(\tilde{x},t)}{\partial \tilde{x}}\right\}. \tag{20}$$

Следует также отметить, что в процессе пуска поверхностного виброуплотнителя бетонных смесей необходимо, по возможности, избегать т.н. “геометрических” резонансов подслоя смеси высотой H, приводящих к режимам отрыва вибробруса от формуемого изделия, нарушению сплошности указанного подслоя и, как следствие, к некачественному уплотнению. Для этого необходимо, чтобы номинальная частота изгибных колебаний вибробруса (на которой последний функционирует в установившемся режиме) $(\omega_{ном})$ удовлетворяла следующим условиям:

$$\pi \cdot \frac{c_l}{H} \cdot m \neq \nu(t) = \varepsilon \cdot t, \text{ при всех } t \in \left[0, \ \frac{\omega_{ном}}{\varepsilon}\right], \tag{21}$$

где $m = 1,2,3,...$.

Выводы

1. В работе обоснована дискретно-континуальная модель для анализа нестационарных колебаний поверхностных виброуплотнителей бетонных смесей, работающих в режиме пуска.
2. Определены основные кинематические характеристики рабочего органа (вибробруса), кинематические и динамические характеристики формуемой бетонной смеси в процессе пуска поверхностного виброуплотнителя с учётом сосредоточенных и распределённых параметров всех взаимодействующих элементов системы "вибробрус – бетонная смесь". Выяснены условия, при которых происходит разрыв контактной зоны между рабочим органом и формуемым изделием.
3. Полученные в данном исследовании результаты могут в дальнейшем служить для уточнения и совершенствования инженерных методов расчёта поверхностных виброуплотнителей бетонных смесей в переходных режимах их функционирования как на стадиях проектирования/конструирования, так и в условиях реальной эксплуатации, что позволит существенно уменьшить амплитуды нежелательных нестационарных колебаний, сопровождающих пуск/торможение указанных устройств, а также повысить их надёжность и долговечность.

Список использованной литературы

1. Гарнец В.Н. Исследование спектра свободных колебаний конструкций поверхностных виброуплотнителей / В.Н. Гарнец, Ю.В. Човнюк // Известия вузов. Строительство и архитектура. – 1984. – №4. – С. 106-110.
2. Гарнец В.Н. Динамический анализ работы поверхностных виброуплотнителей/В.Н. Гарнец, Ю.В. Човнюк//Известия вузов. Строительство и архитектура. – 1987. - №12. – С. 100-104.
3. Назаренко И.И. Прикладные задачи теории вибрационных систем/И.И. Назаренко. – К.: ІСДО, 1993. – 216с.
4. Назаренко І.І. Вібраційні машини і процеси будівельної індустрії / І.І. Назаренко. – К.: КНУБА, 2007. – 203с.
5. Свідерськїй А.Т. Вивчення та впровадження сучасних гідравлічних вібраційних систем у виробничий процес – шлях до створення універсальних самоадаптованих високопродуктивних віброущільнювачів / А.Т. Свідерський // Техніка будівництва. – К.: КНУБА, 2004. – №13. – С. 66-70.
6. Ручинський М.М. Високоефективна машина для формування фундаментних блоків/ М.М. Ручинський//Техніка будівництва. – К.: КНУБА, 2004. – №13. – С. 63-65.
7. Назаренко І.І. Теорія вібромашин для ущільнення будівельних сумішей на основі синтезу дискретно-континуальних систем / І.І. Назаренко, М.М. Ручинський, Б.М. Пентюк//Вібрації в техніці та технологіях. – 2009. - №4(56). – С. 55-59.
8. Гробов В.А. Теория колебаний механических систем / В.А. Гробов. – К.: Вища школа, 1982. – 183 с.
9. Потураев В.Н. Вибрационная техника и технологии в энергоёмких производствах / В.Н. Потураев, В.П. Франчук, В.П. Надутый. – Днепропетровск: НГА Украины, 2002. – 190 с.
10. Франчук В.П. Учёт большого слоя материала вибрационных машин технологического назначения / В.П. Франчук // Вібрації в техніці та технологіях. – 2011. – №2(62). – С. 48-53.
11. Голоскоков Е.Г. Нестационарные колебания механических систем / Е.Г. Голоскоков, А.П. Филиппов. – К.: Наукова думка, 1966. – 336с.
12. Фаддеева В.Н. Таблицы значений интеграла вероятностей от комплексного аргумента / В.Н. Фаддеева, Н.М. Терентьєв. – М.: Гостехиздат, 1954. – 420 с.
13. Рахматулин Х.А. О распространении упругопластических волн в полупространстве/ Х.А. Рахматулин // Прикладная математика и механика. – 1959. – Т. 23, Вып. 3. – С. 419-424.