УДК 620.173
621.813
621.98.043

Ю.Г.РОЗОВ
Херсонский национальный технический университет

АНАЛИЗ ПОТЕРИ ПРОДОЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ДВУХ ТРУБ, ВСТАВЛЕННЫХ ОДНА В ДРУГУЮ, ПРИ УПРУГИХ ДЕФОРМАЦИЯХ

В статье рассмотрена продольная устойчивость при осевом сжатии двух труб, вставленных одна в другую, при упругих деформациях. Рассматривая продольно-поперечный изгиб, решена задача по определению критического усилия, вызывающего потерю продольной устойчивости при осевом сжатии составного бруса, состоящего из внутренней трубы, вставленной без зазора в наружную трубу. Получены формулы для определения радиуса инерции, гибкости и критической силы, при которой происходит потеря продольной устойчивости составной трубы в области упругих деформаций.

Ключевые слова: устойчивость, критическая сила, продольно-поперечный изгиб, упругие деформации, сжатие, труба.

Ю.Г.РОЗОВ
Херсонський національний технічний університет

АНАЛІЗ ВТРАТИ ПОЗДОВЖНЬОЇ СТІЙКОСТІ ДВОХ ТРУБ, ВСТАВЛЕНИХ ОДНА В ІНШУ, ПРИ ПРУЖНИХ ДЕФОРМАЦІЯХ

У статті розглянута подовжня стійкість при осьовому стисненні двох труб, вставлених одна в іншу, при пружних деформаціях. Розглядаючи поздовжньо-поперечний вигин, вирішена задача по визначенню критичного зусилля, що викликає втрату поздовжньої стійкості при осьовому стисненні складеного бруса, що складається з внутрішньої труби, вставленої без зазору в зовнішню трубу. Отримані формули для визначення радіуса інерції, гнучкості та критичної сили , при якій відбувається втрата поздовжньої стійкості складовою труби в області пружних деформацій.

Ключові слова: стійкість, критична сила, поздовжньо-поперечний вигин, пружні деформації, стиск, труба.

J.G. ROZOV
Kherson National Technical University

ANALYSIS OF LONGITUDINAL STABILITY OF TWO TUBES INSERTED INTO ONE ANOTHER, IN THE AREA OF ELASTIC DEFORMATION

The article describes the longitudinal stability under axial compression of two tubes inserted into one another, in the area of elastic deformation. Considering the longitudinal and transverse bending, solved the problem of determining the critical force causing the loss of longitudinal stability during axial compression of the inner tube, inserted without clearance in the outer pipe, with the result that the formulas for determining the radius of gyration, flexibility and critical force at which the loss longitudinal pipes sustainability in the area of elastic deformation.

Keywords: stability, critical force, longitudinal and transverse bending, the elastic deformation of the compression tube.

Постановка проблемы

В конструкциях и сооружениях большое применение находят детали, являющиеся относительно длинными и тонкими стержнями, у которых размеры поперечного сечения малы по сравнению с длиной. Однако, при нагружении таких деталей продольными силами, возможна потеря устойчивости, сопровождаемая продольным изгибом. Основная задача теории устойчивости заключается в определении критического значения внешних сил и ограничение их величин таким образом, чтобы исключить возможность потери устойчивости заданной системы в эксплуатационных режимах.

Анализ последних исследований и публикаций

В современной научной литературе много внимания уделено расчётам на продольную устойчивость различных нагруженных систем [1-9 и др.].

В работах [10, 11] рассмотрена и решена задача по определению критического усилия, вызывающего потерю продольной устойчивости при осевом сжатии составного бруса, состоящего из цилиндрического стержня (оправка), вставленного внутрь цилиндрической трубы (заготовка) без зазора.

Однако расчёты на устойчивость, т.н. двухслойной трубы, состоящей из одной трубы (внутренней), вставленной без зазора в наружную трубу, отсутствуют.

Формулировка цели исследований

На основании теоретического анализа процесса потери продольной устойчивости при упругих деформациях центрально-сжатой двухслойной трубы, состоящей из одной трубы (внутренней), вставленной без зазора в наружную трубу, определить величину критической сжимающей силы, геометрические характеристики двухслойной трубы, и получить аналитические зависимости для определения указанных параметров.

Изложение основного материала исследования

Рассмотрим продольную устойчивость при осевом сжатии двухслойной трубы, состоящей из внутренней трубы 1, вставленной без зазора в наружную трубу 2 без зазора в области упругих деформаций (рис. 1).

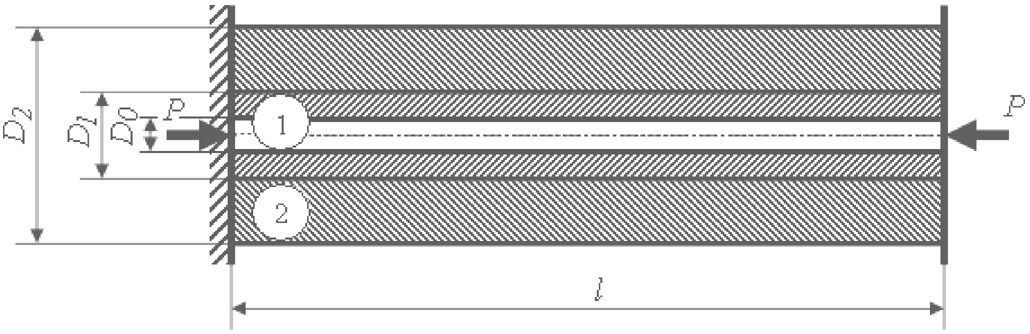

Рис. 1. Схема продольного сжатия составной двухслойной трубы

Предположим, что потеря продольной устойчивости двухслойной трубы происходит в области упругих деформаций (гибкость двухслойной трубы больше предельной) при напряжениях в стенках обеих труб, не превышающих предел пропорциональности. При этом величину предельной гибкости предлагается определять по формуле:

$$\begin{aligned}
&\lambda_{пред} = \pi\sqrt{\frac{E_{ср}}{\sigma_{ПЦ}^{ср}}},\\
&E_{ср} = \frac{E_1F_1 + E_2F_2}{F} = \frac{E_1\left(D_1^2 - D_0^2\right) + E_2\left(D_2^2 - D_1^2\right)}{D_2^2 - D_0^2},\\
&\sigma_{ПЦ}^{ср} = \frac{\sigma_{ПЦ(1)}F_1 + \sigma_{ПЦ(2)}F_2}{F} = \frac{\sigma_{ПЦ(1)}\left(D_1^2 - D_0^2\right) + \sigma_{ПЦ(2)}\left(D_2^2 - D_1^2\right)}{D_2^2 - D_0^2},
\end{aligned} \tag{1}$$

где E_1, E_2 – модули Юнга материалов внутренней и наружной трубы, соответственно;

$\sigma_{ПЦ(1)}; \sigma_{ПЦ(2)}$ – пределы пропорциональности материалов внутренней и наружной трубы, соответственно;

$F_1; F_2$ – площади поперечных сечений внутренней и наружной трубы, соответственно;

$F = F_1 + F_2$ – общая площадь сечения двухслойной трубы.

Если рассматривать устойчивость каждой трубы в отдельности, то с учётом известной формулы Эйлера [10], получим следующие зависимости для определения критической силы:

- для внутренней трубы:

$$P_1^{кр} = \frac{\pi^3 E_1\left(D_1^4 - D_0^4\right)}{64\left(\nu_l l\right)^2} = k_1\left(D_1^4 - D_0^4\right); \tag{2}$$

- для наружной трубы:

$$P_2^{кр} = \frac{\pi^3 E_2 \left(D_2^4 - D_1^4\right)}{64\left(\nu_l l\right)^2} = k\left(D_2^4 - D_1^4\right), \tag{3}$$

где ν_l - коэффициент приведения длины труб;

$k_1 = \dfrac{\pi^3 E_1}{64\left(\nu_l l\right)^2}; k_2 = \dfrac{\pi^3 E_2}{64\left(\nu_l l\right)^2}..$

На основании того, что радиус инерции сечения внутренней трубы всегда меньше радиуса инерции сечения наружной трубы ($\dfrac{\sqrt{D_0^2 + D_1^2}}{4} \le \dfrac{\sqrt{D_1^2 + D_2^2}}{4}$), предполагаем, что во внутренней трубе продольные силы всегда достигают критической величины в первую очередь, т.е. выполняется неравенство $P_1^{кр} \le P_2^{кр}$.

Наличие наружной трубы, с одной стороны, предотвратит потерю устойчивости внутренней трубы при продольной силе $P_1^{кр}$, определяемой по формуле (2). С другой стороны, внутренняя труба под действием продольной силы $P_1^{кр}$, упираясь по внутренней поверхности в стенку внешней трубы в плоскости вероятного изгиба, вместе с осевой нагрузкой, будет создавать продольно-поперечный изгиб для наружной трубы (рис. 2).

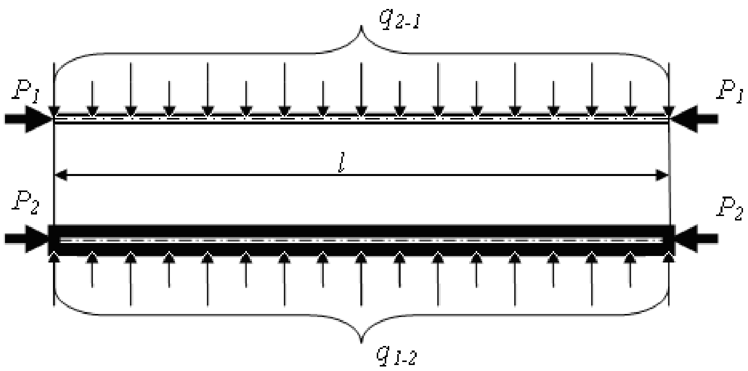

Рис. 2. Расчётная схема продольного изгиба составных частей двухслойной трубы

При заданной схеме деформирования (рис. 1) максимальный изгибающий момент в обеих трубах будет возникать в поперечных сечениях, лежащих в одной плоскости. Их величины могут быть определены по известной формуле:

$$M_{\max} = \sigma_{\max} W_{oc}, \tag{4}$$

где: W_{oc} – осевой момент сопротивления поперечного сечения составной трубы;

σ_{max} – максимальное нормальное напряжение, возникающее в опасном поперечном сечении при изгибе.

Напряжение σmax, действующее в поверхностных слоях стержней (в т.ч. полых) в области упругих деформаций, будет увеличиваться по мере увеличения кривизны до значения, равного пределу пропорциональности металла (|σmax|≤σПЦ) (рис. 3).

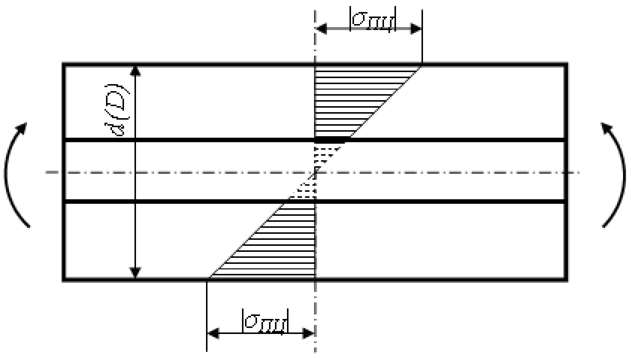

Рис. 3. Распределение напряжений по сечению при упругом изгибе

Для дальнейших расчётов принимаем $|\sigma_{max}|=\sigma_{ПЦ}$, т.е. полагаем, что потеря продольной устойчивости труб происходит на границе перехода от упругого изгиба к упруго-пластическому. При этом, считаем, что величина напряжения $|\sigma_{max}|$ зависит только от изгибающего момента (влиянием продольных сил пренебрегаем).

Независимо от закона распределения поперечной нагрузки вдоль оси труб, используя известные дифференциальную и интегральную зависимости при изгибе:

$$\begin{cases} Q_y = \dfrac{dM}{dz}; \\ M(z) = \int\limits_z Q(z)dz, \end{cases}$$

с учётом очевидного равенства:

$$|q_{1-2}| = |q_{2-1}|,$$

принимаем, что изгибающий момент, создаваемый поперечной нагрузкой, равен:

$$M_{поп} = \sigma_{ПЦ}\frac{\pi\left(D_1^3 - D_0^3\right)}{32}. \tag{5}$$

Для определения изгибающего момента при продольно-поперечном изгибе используем формулу в виде [9]:

$$M_{прод} = \frac{M_{поп}}{1 - \dfrac{P_П^{кр}}{P_Э}}, \tag{6}$$

где $M_{прод}$ – изгибающий момент при продольно-поперечном изгибе. Так как нас интересует момент начала изгиба (внутренней и наружной труб), то, с учётом формулы (4) и принятом условии возникновения изгиба ($|\sigma_{max}|=\sigma_{ПЦ}$):

$$M_{прод} = \sigma_{ПЦ}^{ср}\frac{\pi\left(D_2^3 - D_0^3\right)}{32},$$

(для определения $\sigma_{ПЦ}^{ср}$ используем формулу (1));

$M_{поп}$ – изгибающий момент от действия поперечной нагрузки (от действия со стороны внутренней трубы 1, рис. 1), для нашего случая (формула (5)):

$$M_{поп} = \sigma_{ПЦ(1)}\frac{\pi\left(D_1^3 - D_0^3\right)}{32};$$

$P_П^{кр}$ – продольная сила, имеющая критическое значение при продольно-поперечном изгибе (для нашего случая учитываем продольно-поперечный изгиб внешней трубы 2, так как действие силы на внутреннюю трубу 1 учтено при постановке задачи, а именно – возникновение и действие поперечного изгибающего момента $M_{поп}$): $P_П^{кр} = P_{П(2)}^{кр}$;

$P_Э$ – так называемая, Эйлерова сила, для нашего случая $P_Э = P_2^{кр}$ (формула (3)).

Тогда, с учётом формулы (6):

$$P_{П(2)}^{кр} = P_2^{кр}\frac{\sigma_{ПЦ}^{ср}\left(D_2^3 - D_0^3\right) - \sigma_{ПЦ(1)}\left(D_1^3 - D_0^3\right)}{\sigma_{ПЦ}^{ср}\left(D_2^3 - D_0^3\right)}. \tag{7}$$

Для определения суммарной критической силы $P_\Sigma^{кр}$, при которой произойдёт потеря устойчивости составной трубы, необходимо учесть силу, действующую на внутреннюю трубу (учитываем её величину $P_1^{кр}$), т.е.:

$$P_\Sigma^{кр} = P_{П(2)}^{кр} + P_1^{кр}, \tag{8}$$

Тогда, с учётом формул (2), (3), (7), (8), получим аналитическую зависимость для определения силы $P_\Sigma^{кр}$, при которой происходит потеря продольной устойчивости двухслойной трубы:

$$P_\Sigma^{кр} = \frac{\pi^3}{64(\nu_l l)^2}\left[E_1\left(D_1^4 - D_0^4\right) + E_2\left(D_2^4 - D_1^4\right)\left(1 - \frac{\sigma_{ПЦ(1)}\left(D_1^3 - D_0^3\right)}{\sigma_{ПЦ}^{ср}\left(D_2^3 - D_0^3\right)}\right)\right]. \tag{9}$$

Полученная формула отвечает граничным условиям (при $D_1=D_2$ или $D_1=D_0$ (при этом очевидно: $E_1=E_2$), формула (9) совпадает с формулой для определения критической силы для сплошной трубы диаметрами D_0 (внутренний) и D_2 (наружный) и, кроме того, при D_0=D_1=0, формула (9) совпадает с формулой для определения критической силы для сплошного круглого бруса диаметром D_2).

Для частного случая, когда E_1=E_2=E (например, материал наружной и внутренней трубы – сталь), формула (9) имеет вид:

$$P_{\Sigma}^{кр}=\frac{\pi^3 E}{64(\nu_l l)^2}\left[D_1^4-D_0^4+\left(D_2^4-D_1^4\right)\left(1-\frac{\sigma_{ПЦ(1)}\left(D_1^3-D_0^3\right)}{\sigma_{ПЦ}^{cp}\left(D_2^3-D_0^3\right)}\right)\right]. \qquad (9^{/})$$

Для ещё более частного случая, когда E_1=E_2=E и $\sigma_{ПЦ(1)}$=$\sigma_{ПЦ(2)}$=$\sigma_{ПЦ}$ (например, материал наружной и внутренней трубы – сталь одной марки), формула (9) имеет вид:

$$P_{\Sigma}^{кр}=\frac{\pi^3 E}{64(\nu_l l)^2}\left[D_1^4-D_0^4+\left(D_2^4-D_1^4\right)\frac{D_2^3-D_1^3}{D_2^3-D_0^3}\right]. \qquad (9^{//})$$

Выражение (9) позволяет вывести формулу для определения гибкости составного бруса. Учитывая аналогию с трубой диаметрами D_0 (внутренний) и D_2 (наружный), запишем выражение для определения радиуса инерции сечения составного бруса:

$$i=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{D_1^4-D_0^4}{D_2^2-D_0^2}+\frac{E_2}{E_1}\cdot\frac{D_2^4-D_1^4}{D_2^2-D_0^2}\cdot\left(1-\frac{\sigma_{ПЦ(1)}\left(D_1^3-D_0^3\right)}{\sigma_{ПЦ}^{cp}\left(D_2^3-D_0^3\right)}\right)}. \qquad (10)$$

По аналогии с выводами формул ($9^{/}$) и ($9^{//}$), получим формулы для определения радиуса инерции сечения составного бруса для рассмотренных выше частных случаев:

$$i=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{D_1^4-D_0^4}{D_2^2-D_0^2}+\frac{D_2^4-D_1^4}{D_2^2-D_0^2}\cdot\left(1-\frac{\sigma_{ПЦ(1)}\left(D_1^3-D_0^3\right)}{\sigma_{ПЦ}^{cp}\left(D_2^3-D_0^3\right)}\right)}. \qquad (10^{/})$$

$$i=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{D_1^4-D_0^4}{D_2^2-D_0^2}+\frac{D_2^4-D_1^4}{D_2^2-D_0^2}\cdot\left(1-\frac{\left(D_1^3-D_0^3\right)}{\left(D_2^3-D_0^3\right)}\right)}. \qquad (10^{//})$$

Тогда гибкость составного бруса может быть определена по формуле:

$$\lambda=\frac{4\nu_l l}{\sqrt{\frac{D_1^4-D_0^4}{D_2^2-D_0^2}+\frac{E_2}{E_1}\cdot\frac{D_2^4-D_1^4}{D_2^2-D_0^2}\cdot\left(1-\frac{\sigma_{ПЦ(1)}\left(D_1^3-D_0^3\right)}{\sigma_{ПЦ}^{cp}\left(D_2^3-D_0^3\right)}\right)}}, \qquad (11)$$

$$\lambda=\frac{4\nu_l l}{\sqrt{\frac{D_1^4-D_0^4}{D_2^2-D_0^2}+\frac{D_2^4-D_1^4}{D_2^2-D_0^2}\cdot\left(1-\frac{\sigma_{ПЦ(1)}\left(D_1^3-D_0^3\right)}{\sigma_{ПЦ}^{cp}\left(D_2^3-D_0^3\right)}\right)}}, \qquad (11^{/})$$

$$\lambda=\frac{4\nu_l l}{\sqrt{\frac{D_1^4-D_0^4}{D_2^2-D_0^2}+\frac{D_2^4-D_1^4}{D_2^2-D_0^2}\cdot\left(1-\frac{D_1^3-D_0^3}{D_2^3-D_0^3}\right)}}. \qquad (11^{//})$$

Формулы (11), ($11^{/}$) и ($11^{//}$) позволяют определить гибкость двухслойной трубы, например, с целью сравнения с предельной гибкостью (формула (1)).

Выводы

1. Рассмотрена продольная устойчивость при осевом сжатии двух труб, вставленных одна в другую, при упругих деформациях.
2. Впервые получены формулы для определения радиуса инерции, гибкости и критической силы, при которой происходит потеря продольной устойчивости составной трубы в области упругих деформаций.

Список использованной литературы

1. Справочник по сопротивлению материалов / Г. С. Писаренко, А. П. Яковлев, В. В. Матвеев ; отв. ред. Г. С. Писаренко – 2-е изд., перераб. и доп. – К. : Наукова думка, 1988. – 736 с.
2. Алфутов Н. А. Основы расчёта на устойчивость упругих систем / Н. А. Алфутов. – М. : Машиностроение, 1978. – 312 с.

3. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем / А. С. Вольмир. – М. : Наука, 1967. – 984 с.
4. Григолюк Э. И. Устойчивость оболочек / Э. И. Григолюк, В. В. Кабанов. – М. : Наука, 1978. – 360 с.
5. Доннел Л. Г. Балки, пластины и оболочки / Л. Г. Доннел. – М. : Наука, 1982. – 568 с.
6. Товстик П. Е. Устойчивость тонких оболочек / П. Е. Товстик. – М. : Наука, 1995. – 320 с.
7. Пикуль В. В. К теории устойчивости оболочек / В. В. Пикуль // Вестник Дальневосточного отделения РАН. – 2006. – № 4. – С. 81–86.
8. Непершин Р. И. Пластическая потеря устойчивости при осевом сжатии трубы / Р. И. Непершин // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета. – 2011. – № 3 (27). – Ч. 1. – С. 329–336.
9. Сопротивление материалов : учебник для вузов / общ. ред. акад. АН УССР Г. С. Писаренко. – 4-е изд., перераб. и доп. – К. : Вища школа. Головное изд-во, 1979. – 696 с.
10. Розов Ю. Г. Потеря продольной устойчивости трубчатой заготовки на оправке при прессовании / Ю. Г. Розов // Прогресивні техніка, технологія та інженерна освіта : сб. труд. участников XIV Международной научно-практической конференции, посвященной 115-летию механико-машиностроительного института НТУУ «КПИ», 25–28 июня 2013 г., Киев–Севастополь, Украина. – С. 60–62.
11. Розов Ю. Г. Оценка продольной устойчивости при обжатии трубчатой заготовки на оправке в операциях ОМД / Ю. Г. Розов // Теоретические и практические проблемы в обработке материалов давлением и качестве специального образования : Тезисы докладов IV Международной научно-технической конференции, 14–17 мая 2013 г., Киев, Украина. – С. 90–91.